RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 maggio 1902.

P. Blaserna, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Anatomia. — *Sopra gli organi escretori delle Salpidi.* Nota del Socio Todaro.

Gli organi escretori o renali delle Salpidi sono rimasti sconosciuti fino ai nostri giorni. L'anno scorso, nella seduta 11 aprile del III Congresso Zoologico Italiano tenuto in Napoli (1), io dimostrai le numerose e voluminose concrezioni uriche, che si trovano nel mesenchima attorno all'esofago e allo stomaco degli individui adulti della prole solitaria e della prole aggregata della *Helicosalpa virgola* (*), delle quali avevo ottenuto la prova non dubbia dell'acido urico con la reazione caratteristica della murexide.

Contemporaneamente W. Dahlgrün, nella comunicazione preliminare (2) sopra la struttura degli organi escretori dei Tunicati e nella Memoria pubblicata sopra lo stesso argomento (3), ha fatto conoscere che nel mesenchima, che occupa lo spazio tra l'esofago e lo stomaco da un lato ed il retto dall'altro degli individui adulti di ambedue le forme, solitaria ed aggregata, della

(1) F. Todaro, *L'organo renale delle Salpe.* Monitore zoologico italiano, anno XII, N. 7, 1901.

(*) Divido la famiglia delle *Salpidae* Forbes in tre generi: *Helicosalpa* mihi; *Cyclosalpa* Blainv.; *Salpa* Forsk.

(2) W. Dahlgrün, *Untersuchungen über den Bau der Excretionsorgane der Tunicaten.* Zoologischer Anzeiger, Bd. XXIV, N. 638, 1901.

(3) W. Dahlgrün, *Untersuchungen über den Bau der Excretionsorgane der Tunicaten.* Archiv für mikroskopische Anatomie, Bd. 58, Heft 2, 1901.

Salpa democratica e della *S. fusiformis*, si trovano cellule ovali contenenti granulazioni uriche, che egli perciò definì come vere cellule renali, derivate dalle cellule del mesenchima. Quindi sostenne che l'insieme di queste cellule forma il rene delle Salpidi, il quale sarebbe semplice come quello delle Synascidie e delle Cionadi, in cui, secondo lo stesso autore, sarebbe rappresentato da cellule renali isolate; nell'un caso e nell'altro perdurerebbero per tutta la vita dell'animale, e per conseguenza crescerebbero di numero man mano che altre cellule mesenchimatiche si caricano di granulazioni uriche. Egli paragona la funzione di queste cellule a quella della vescica renale delle Molgulidi e delle vescicole renali delle Phallusie, nelle quali C. Kupffer (1) ha stabilito che la secrezione non viene espulsa, ma depositata in sostanza densa entro vescicole chiuse. Però la comparazione non regge: nelle Molgulidi e nelle Phallusie le cellule epiteliali della parete della vescicola non accumulano, ma segregano i prodotti del ricambio materiale, il quale per la mancanza d'un condotto escretore rimane nella cavità della stessa vescicola ove si addensa; mentre le così dette cellule renali isolate del Dahlgrün non segregano, ma accumulano tali prodotti nel loro protoplasma senza, secondo lui, soggiacere ad altre mutazioni.

Invece io dimostrai al Congresso di Napoli che le concrezioni uriche si disgregano in finissime granulazioni, le quali, insieme all'acqua dell'emolinfa delle lacune vascolari, vengono a formare l'urina che si elimina per la via dell'esofago. Questo fatto mi ha condotto a scoprire gli organi renali delle Salpidi nel maggior numero delle specie che vivono nel Mediterraneo, organi che sono sfuggiti totalmente alle indagini del Dahlgrün.

Pubblicherò quanto prima le mie ricerche; per ora mi limito a comunicare all'Accademia soltanto i risultati principali.

Il mesenchima della regione viscerale delle Salpidi, e credo forse di tutti i Tunicati, ha la proprietà di formare gli endotelî ed il sangue, vale a dire, durante tutta la vita dell'individuo, le cellule del mesenchima di questa regione si moltiplicano e si trasformano in endotelî, in globuli sanguigni ed in linfociti, che sono cellule prive di membrana, come le cellule del mesenchima dalle quali derivano (*).

(1) C. Kupffer, *Zur Entiwckelung der einfachen Ascidien.* Archiv für mikroskopische Anatomie, Bd. VIII, 1872.

(*) Gli endotelî ed il sangue hanno anche altre fonti d'origine: durante la vita embrionale si formano nella placenta fetale e nell'oeleoblasto della prole solitaria, e nello stoloblasto della prole aggregata. Nelle specie del gen. *Helicosalpa* ed in quelle del gen. *Cyclosalpa*, il cosidetto organo allungato, che perdura per tutta la vita ai lati del corpo della Salpa, come già io ho dimostrato, è pure una glandula emopojetica (vedi Todaro, *Sopra lo sviluppo e l'anatomia delle Salpe.* Atti della R. Accademia dei Lincei, vol. II, serie 2ª, 1875).

I globuli sanguigni sono gli elementi più numerosi e si presentano sotto due fasi: in origine sono piccole cellule rotonde prive di membrana, con un nucleo relativamente grande; quindi, crescendo, perdono il nucleo e presentano l'aspetto di morula, a motivo della ripartizione del loro protoplasma in piccoli campi poligonali.

I linfociti sono grandi cellule rotonde od ovali senza membrana, con citoplasma chiaro e leggermente granuloso; hanno un piccolo nucleo rotondo, e corrispondono ai così detti fagociti.

Nel mesenchima, che sta intorno agli organi renali e specialmente in corrispondenza dell' esofago e dello stomaco, il citoplasma, tanto de' globuli sanguigni quanto dei linfociti, si carica di sostanze uriche.

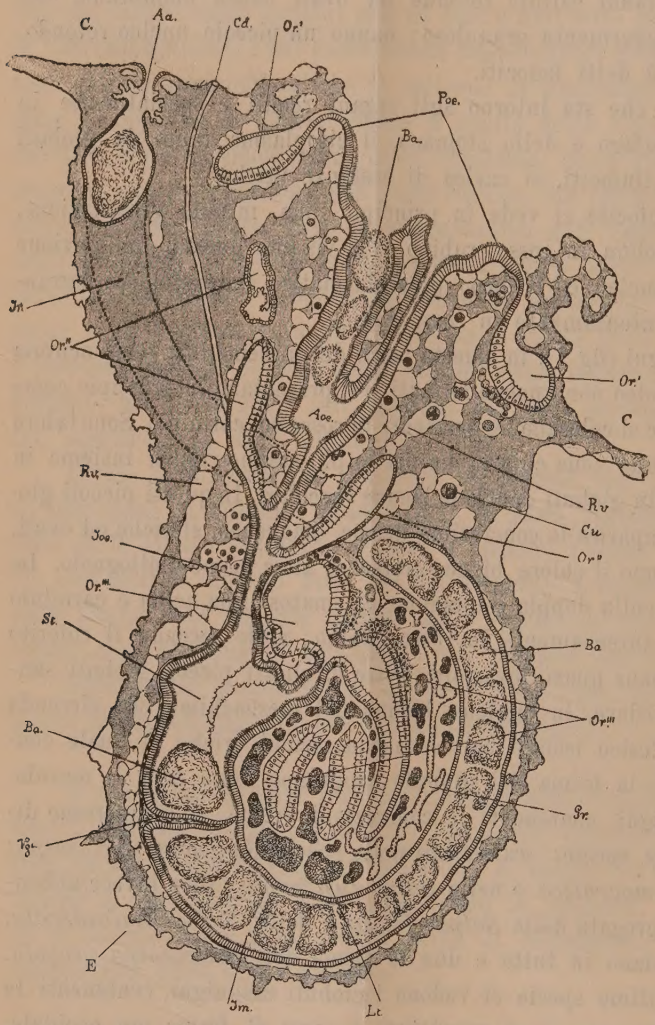
Nel corpo del linfocito si vede in principio una minuta granulazione, che col carminio si colora in rosso rubino. Via via che questa granulazione aumenta, sparisce il nucleo, ed il corpo protoplasmatico, notevolmente ingrandito, si colora tutto intensamente in rosso rubino.

I globuli sanguigni (fig 1), in questa parte del mesenchima (mesenchima renale), perdono il nucleo non appena formati, e si presentano in principio come piccoli corpi sferici, che si colorano leggermente in rosso col carminio. Sono talora isolati, circondati da una zona chiara, ma per lo più stanno riuniti insieme in tre, quattro, cinque o più globuli dentro le lacune vascolari. In questi piccoli globuli cominciano a comparire le concrezioni uriche, omogenee, sferiche od ovali, alcune delle quali hanno il colore bianco-cretaceo, altre bruno-giallognolo. Le prime col carminio, o colla doppia colorazione di ematossilina acida e carminio boracico, si colorano intensamente in rosso rubino; nelle seconde il colorito bruno-giallognolo rimane quasi invariato. Oltre di questi piccoli globuli sanguigni, non è raro vedere, in qualche lacuna del mesenchima che circonda l'esofago, un corpo sferico isolato, carico di concrezioni uriche, il quale conserva la grandezza e la forma del globulo sanguigno nella fase di morula.

I globuli sanguigni, contenenti le concrezioni uriche, si comportano diversamente secondo le specie: scarsissimi nelle specie del genere *Cyclosalpa*; scarsi nella *Salpa democratica* e nella *Salpa fusiformis*; sono invece abbondanti nella forma aggregata della *Salpa Tilesii* e della *Salpa confoederata*, ma sopratutto abbondano in tutte e due le forme dell' *Helicosalpa virgola*.

In queste tre ultime specie si vedono i globuli sanguigni, contenenti le concrezioni uriche, formare grossi conglobati o corpi di forma ora ovoidale, ora sferica. Questi corpi nella *Salpa Tilesii* lasciano nettamente vedere i globuli che concorrono a formarli; poichè le granulazioni uriche, brune e rosse, stanno nel corpo dei globuli come sferule di grandezza variabile, per lo più piccole, isolate e non molto abbondanti. Viceversa, nella prole aggregata della *Salpa confoederata* (fig. 1, *Cu*) e in ambedue le forme della *Helicosalpa virgola*, i globuli del sangue accumulano tanta sostanza urica, che questa si mostra fusa in massa, e non si veggono più i limiti netti tra un globulo

e l'altro. Tutto il conglobato si presenta come un corpo, o sferico, od ovale, circondato da uno strato chiaro di sostanza organica, ed intersecato da linee bianchicce della stessa sostanza, che rappresentano i primitivi limiti di adesione dei globuli fra loro.



E. — Ectoderma.
C. — Cloaca o cavità peribranchiale.
Poe. — Padiglione esofageo.
Aoe. — Ampolla esofagea.
Ioe. — Istmo dell'esofago
St. — Stomaco.
Vgi. — Valvola gastro-intestinale.
Im. — Intestino medio.
Ir. — Intestino retto.
Aa. — Apertura anale.
Or.1 — Primo paio di organi renali.
Or.2 — Secondo paio di organi renali.
Or.3 — Terzo paio di organi renali.
Gr. — Glandola renale.
Ba. — Bolo alimentare.
Lt. — Lobi del testicolo.
Cd. — Canale deferente del testicolo.
Rv. — Rete vascolare.
Cu. — Concrezioni uriche.

Fig. 1. — Schema dell'apparecchio uro-digerente e del testicolo della *Salpa confoederata. (prol. ag.)*.

Non tutti questi corpi presentano uniformemente il colorito bruno-giallognolo; ma in alcuni si distinguono dei settori bianco-cretacei o rosso-rubini; ciò sta in rapporto con i globuli diversi, che sono entrati nella loro composizione. Nell'*Helicosalpa virgola* questi corpi, tanto nella prole solitaria come

nella prole aggregata, sono così voluminosi che fanno prominenza sulla superficie; e negli individui adulti, sono tanto abbondanti ai lati dell'esofago, che danno un carattere particolare al mesenchima renale, il quale, con una lente anche di mediocre ingrandimento, si vede avere la forma presso a poco triango-

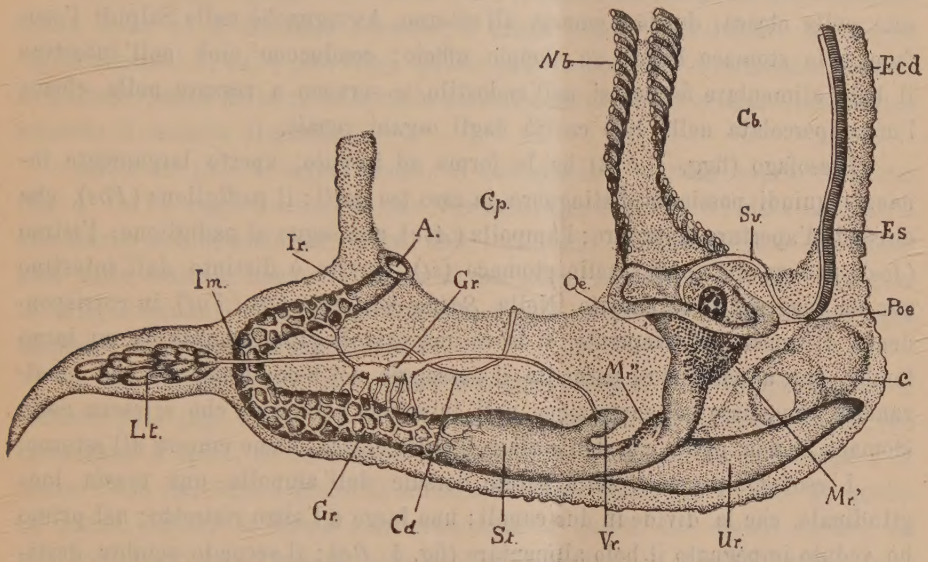


Fig. 2. — Regione viscerale della *Salpa virgola* (*prol. ag.*), veduta a debole ingrandimento.

Nb. Nastro branchiale. — Sv. Solco ventrale. — Es. Endostilo. — Oe. Esofago. — St. Stomaco. — Im. Intestino medio. — Ir. Intestino retto. — A. Ano. — Lt. Lobi del testicolo. — Cd. Canale deferente. — Gr. Glandola renale. — Vr. Vescichetta o ampolla renale. — De. Dutto escretore. — Ur. Utricolo renale. — Cb. Cavità branchiale. — Cp. Cavità peribranchiale o cloaca. — Ecd. Ectoderma. — c. Cuore. — Mr.' Mesenchima renale destro. — Mr.'' Mesenchima renale sinistro.

lare col vertice rivolto indietro e prolungato fino allo stomaco (fig. 2, *Mr'*, *Mr''*). In questo mesenchima i corpi o conglobati urici, si presentano come i pezzi di un mosaico. Essi sono composti di uno stroma di sostanza organica, derivata dal protoplasma dei globuli sanguigni, e delle concrezioni uriche in essa contenute.

I globuli sanguigni, contenenti le concrezioni uriche, che si veggono nelle lacune vascolari del mesenchima renale, non tutti nascono *in situ*, ma molti provengono dalle parti lontane, e servono a trasportare i prodotti del ricambio materiale agli organi escretori. Difatto la sostanza organica dei corpi che risultano dalla fusione di questi globuli e quella dei linfociti, si va lentamente assottigliando e riassorbendo; quindi le concrezioni uriche si disgregano in finissime granulazioni, che, trasportate dall' idrolinfa del sangue, traversano il mesenchima e penetrano nell'epitelio degli organi renali, dal quale sono eliminate nel modo che dirò.

Nella regione viscerale (fig. 1, *Or'*, *or''*, *or'''*) si trovano, circondati dal mesenchima, tre paia di organi escretori o renali, diversamente sviluppati secondo la specie ed anche secondo la prole nella stessa specie. Questi organi hanno diversa relazione con l'esofago e lo stomaco, e si possono, secondo la posizione che occupano, distinguere in primo, secondo e terzo paio. Ma sia direttamente, sia indirettamente l'orina segregata da loro viene ad essere versata nella cloaca, donde è emessa all'esterno. Avvegnachè nelle Salpidi l'esofago e lo stomaco hanno un doppio ufficio: conducono cioè nell' intestino il bolo alimentare formatosi nell'endostilo, e servono a versare nella cloaca l'urina percolata nella loro cavità dagli organi renali.

L' esofago (figg. 1 e 2) ha la forma ad imbuto, aperto largamente innanzi; quindi possiamo distinguere in esso tre parti: il padiglione (*Poe*), che circonda l'apertura anteriore; l'ampolla (*Aoe*), che segue al padiglione; l'istmo (*Ioe*), che va ad aprirsi nello stomaco (*st*). Questo è distinto dall' intestino per un leggiero strozzamento. Nella *Salpa confoederata* (*Vgi*), in corrispondenza di questo strozzamento, si trova una valvola rappresentata da un largo lembo, che abbassandosi permette il passaggio del bolo alimentare, ed innalzandosi impedisce la penetrazione nell' intestino dell' urina che si versa nello stomaco, donde, per la via dell'esofago e della cloaca, viene emessa all'esterno.

L' esofago presenta nella parete dorsale dell' ampolla una cresta longitudinale, che la divide in due canali: uno largo e l'altro ristretto; nel primo ho veduto impegnato il bolo alimentare (fig. 1, *Ba*); il secondo sembra destinato al passaggio dell'urina, che dall' esofago si riversa nella cloaca. Invero l'apertura anteriore dell'esofago è circondata da una larga ripiegatura ovale, che presenta la forma di un padiglione (figg. 1, 2, *Poe*), posto trasversalmente sopra le due radici del nastro branchiale, che separano l'una dall'altra, nella loro parete posteriore, la cavità branchiale, e la cavità peribranchiale, le quali, come è noto, comunicano largamente ai lati del nastro branchiale. Il padiglione dell'esofago adunque è dorsalmente posto, cioè nella cavità peribranchiale o cloaca; esso (fig. 2, *Sv*) riceve il solco ventrale della faringe o cavità branchiale, il quale, al di là dell' estremità posteriore dell' endostilo (*es*), si prolunga ricurvato all' innanzi, e risalendo dorsalmente sul padiglione, con cammino a spira si porta nella parete posteriore dell'ampolla esofagea, ove si continua coll' estremità superiore del canale, che conduce il bolo alimentare.

La parete di tutto il tubo alimentare è composta di due membrane: una interna rappresentata da un solo strato di epitelio; ed una esterna, che si colora in rosso, e che è stata descritta come formata di semplice cellulosa, ma invece contiene molte fibre muscolari liscie.

L'epitelio del padiglione esofageo è pavimentoso, come quello della faringe e della cloaca. L'epitelio pavimentoso si continua nella parete ventrale dell'ampolla; mentre in quella dorsale è cilindrico e vibratile, come l'epitelio delle pliche, che limitano l'endostilo o meglio il solco ventrale della cavità

branchiale. Nell' istmo dell'esofago, nello stomaco e nell' intestino, l'epitelio è sempre cilindrico e vibratile, meno nel retto ove è cubico o semplicemente pavimentoso.

Tutto l'epitelio del tubo digestivo è secernente. Il liquido segregato dalle cellule epiteliali dell' intestino agisce sopra il bolo alimentare; ma l'epitelio dell'esofago segrega molto muco, che si colora intensamente con l'ematossilina acida ed il carminio boracico, e lascia vedere difficilmente le lunghe ciglia vibratili di cui è provvisto. Queste però si mostrano chiaramente, riunite ai granuli basali della cellula, nelle sezioni colorite con l'ematossilina ferrica secondo il metodo Heidenhain.

Delle tre paia di organi renali, di cui abbiamo parlato sopra, il primo (fig. 1, *Or'*) è rappresentato da due vesciche; una a destra e l'altra a sinistra, che stanno nel mesenchima ai lati dell' inizio dell' esofago. Queste due vesciche, nella sezione, hanno la forma di un fiasco coricato col collo ripiegato in alto, il quale si apre, con una stretta fissura, ai lati del padiglione esofageo e quindi direttamente nella cloaca.

I due organi renali, uno destro e l' altro sinistro, che rappresentano il secondo paio (fig. 1, *Or''*), sono compressi, e sboccano nell'istmo esofageo, che circondano a spira. Si terminano a fondo cieco, e variano di grandezza e di forma l'uno dall'altro: quello di sinistra è sempre molto più grande di quello di destra. Inoltre la forma e la grandezza di questi due organi variano da una specie all'altra: piccoli nella *Salpa democratica* e nella *Salpa fusiformis*; sono viceversa grandi nelle altre specie, specialmente il sinistro che, nella *Salpa confoederata*, *Salpa Tilesii*, *Salpa zonaria*, *Salpa maxima*, ecc., si prolunga molto, innanzi ed indietro.

I due organi renali posteriori, che fanno il terzo paio (fig. 1, *Or'''*), sboccano in un infossamento dello stomaco che sta ai lati della sua apertura superiore o esofagea, il quale infossamento è a forma di imbuto ciliare capovolto, più o meno pronunciato secondo la specie. Questi due organi sono diversamente sviluppati, non solo tra una specie e l'altra, ma anche tra una prole e l'altra della stessa specie. Nella prole solitaria delle specie appartenenti al genere *Helicosalpa* ed al gen. *Cyclosalpa*, ove sono stati veduti fin dai primi tempi senza essere stati riconosciuti come reni, hanno entrambe la forma di un utricolo o di un'appendice cecale a dito di guanto, e sono presso a poco di uguale grandezza. Viceversa nella prole aggregata di tutte le specie di questi due generi, l'appendice destra si riduce ad una semplice ampolla. In questa viene a sboccare (fig. 2, *Gr*) il lungo condotto escretore d'una glandola tubulare, disposta a rete attorno l' intestino medio, la quale forma parte integrante del terzo paio degli organi renali. Ma questa glandula si sviluppa indipendentemente dagli organi renali.

Tutti gli organi renali, che ho descritto, si sviluppano contemporaneamente al tubo alimentare per estroflessioni dell'entoderma; mentre la glandula in discorso si sviluppa più tardi dalle cellule epiteliali, che si trovano isolate

all' intorno dell' intestino medio, sotto della sua tunica o membrana propria. Molto tempo dopo che dall' entoderma si sono formati gli organi renali, ed il tubo alimentare si è differenziato in esofago, stomaco ed intestino, le predette cellule epiteliali isolate si moltiplicano e formano altrettanti gruppi cellulari, i quali prima solidi divengono poi cavi, trasformandosi così in vescicole epiteliali. Queste vescicole, mano mano che si allungano, si toccano per la loro estremità, ove si fondono e comunicano tra loro; così vengono a costituire la rete tubulare, che rappresenta questa glandula. Le vescicole, che stanno in prossimità dello stomaco, sono più grandi e, riunendosi, formano il condotto escretore di questa glandula, della quale ho seguito tutte le fasi dello sviluppo, fino all'unione del suo dutto con l'ampolla renale, nella prole aggregata della *Salpa democratica*.

Nella forma aggregata della *Salpa confoederata* (fig. 1, *Or'''*), come in tutte le specie del gen. *Salpa*, i due organi renali, che formano il paio posteriore, si trovano nel mesenchima, che occupa lo spazio fra lo stomaco e l' intestino medio, unitamente alla glandula, il condotto escretore della quale (fig. 1, *Gr*) decorre nella concavità dell' intestino, e sbocca nell'organo renale dorsale che si presenta come una vescica, mentre l'organo ventrale è sviluppato in un lunghissimo tubulo convoluto a forma di coclea, che, in tutte le specie del genere *Salpa* (*Salpae carioenteratae*), occupa il centro del cosidetto nucleo viscerale.

Nel mesenchima, interposto fra le spire del tubulo convoluto l'intestino medio e lo stomaco si trovano sparsi i lobi del testicolo, i quali, sotto l'estremità posteriore dell' esofago, vengono a formare il canale deferente. Questo, decorrendo in avanti fra il retto e l'esofago, si viene ad aprire nella cloaca (fig. 1, *Lt*, *cd*).

La figura schematica (fig. 1), che qui ho posto per indicare la posizione ed i rapporti degli organi renali, è stata ricostruita sopra le sezioni longitudinali, orizzontali e sagittali, della regione viscerale della prole aggregata della *Salpa confoederata* Forsk., nello stato adulto. Ma sebbene la posizione di questi organi non cambia nelle altre specie, pur tuttavia tanto la grandezza quanto i rapporti loro mutano da un genere all'altro e, più o meno, anche fra una specie e l'altra dello stesso genere. Quindi bisognerà trattarne particolarmente, come farò nella Memoria. Ora mi limito soltanto a dire alcune parole intorno la struttura di questi organi.

Da quanto innanzi ho detto risulta che i reni delle Salpidi sono organi cavi, i quali contengono l' urina, che viene segregata dalle pareti loro e quindi versata nella cloaca, o direttamente, o indirettamente per la via dello stomaco e dell'esofago.

La parete di questi organi è composta di una membrana propria (tunica esterna) e di un epitelio. La membrana propria è molle, sottile, amorfa, e si colora con l' ematossilina acida e col carminio. L' epitelio è composto di

un solo strato di cellule, il quale a livello dell'apertura dell'organo si continua con l'epitelio della superficie su cui sbocca. Quindi, a livello dell'apertura, è pavimentoso, come quello della cloaca, negli organi renali anteriori, o del primo paio; è vibratile, come quello dell'esofago e dello stomaco, negli organi renali del secondo e terzo paio.

In tutti gli organi renali, l'epitelio propriamente glandulare si distingue in pavimentoso e cilindrico.

Negli organi del primo paio (fig. 1, *or'*), l'epitelio pavimentoso si trova lungo la parete esterna, ove riveste una procedenza di mesenchima ricco di lacune vascolari. Quest'epitelio non ha altro ufficio che quello di segregare l'acqua, come l'epitelio pavimentoso dei glomeruli del Malpighi del rene dei vertebrati. L'epitelio cilindrico occupa invece tutta la parete interna di questi organi, e presenta i caratteri dell'epitelio dei tubuli contorti del rene dei vertebrati.

Queste due diverse specie di epitelio si trovano ugualmente negli organi renali del secondo e terzo paio (fig. 1, *or''*, *or'''*); ma in questi organi l'epitelio cilindrico, che segrega i principî specifici dell'urina, è molto esteso, riducendosi l'epitelio pavimentoso ad un tratto, che si trova nella parete esterna di essi verso l'estremità distale chiusa a fondo cieco.

Nella glandola renale (fig. 2, *gr*), la quale, come ho detto sopra, nella forma aggregata delle specie del gen. *Helicosalpa* e del gen. *Cyclosalpa* è connessa con l'ampolla del terzo paio, e nella *Salpa confoederata* (fig. 1, *gr*) si apre nel sacco dorsale del terzo paio degli organi renali, l'epitelio è pavimentoso da per tutto: le cellule sono cubiche o piatte, hanno un nucleo rotondo e granuloso, ed il protoplasma chiaro. Nei piccoli tubuli, che formano questa glandola, e nel suo condotto escretore si trova sempre un liquido chiaro; quindi essa segrega l'acqua come l'epitelio pavimentoso del primo e secondo paio e per conseguenza come i glomeruli del Malpighi.

Le cellule dell'epitelio cilindrico, che negli organi renali delle Salpidi hanno l'ufficio di eliminare dall'organismo i prodotti del ricambio materiale, sono molto alte, e in esse, come nelle cellule dei tuboli contorti dei vertebrati, si possono distinguere due porzioni, una basale e l'altra assiale, fra le quali è interposto il nucleo, il quale è vescicoloso, e contiene uno scarso reticolo di linina e alcuni granuli di cromatina variamente disposti.

Queste cellule non hanno membrana nè orlo cuticulare, ed il corpo protoplasmatico loro varia di tessitura, secondo le fasi della sua attività secretiva. Nelle sottili sezioni (7-10 micromillimetri), colorite con la doppia colorazione di ematossilina acida e carminio boracico, si osserva che il corpo di queste cellule contiene le fine granulazioni uriche caratteristiche, colorite alcune in nero o bruno giallognolo, altre in rosso rubino, perfettamente simili alle granulazioni che si trovano nel sottostante mesenchima, e che, come

innanzi si è detto, derivano dalla disgregazione delle masse di concrezioni uriche, che occupano le lacune vascolari del mesenchima renale.

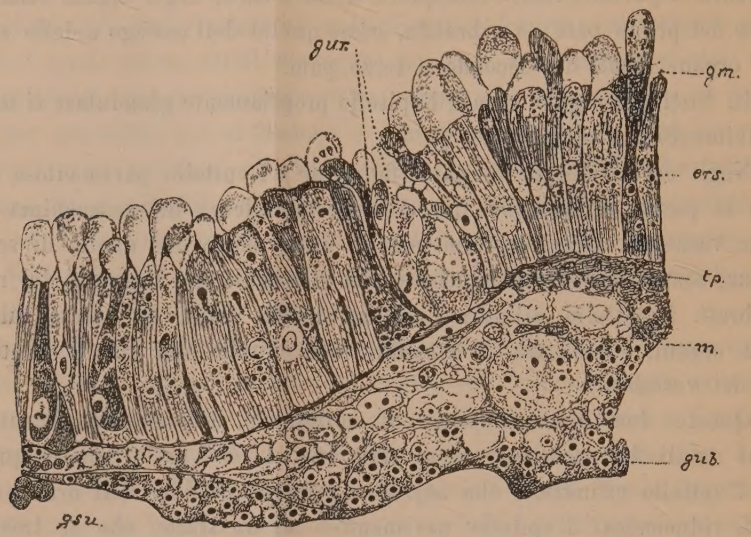


Fig. 3. — Epitelio cilindrico della parte prossimale all'apertura del 3° paio degli organi renali della *Salpa confoederata (prol. ag.)*.

ers. Epitelio renale secernente. — *tp.* Tunica propria. — *m.* Mesenchima. — *gsu.* Globuli sanguigni con concrezioni uriche. — *gm.* Globi mucosi. — *gub.* Granuli urici bruno-giallognoli. — *gur.* Granuli urici rossi.

Nella prole aggregata della *Salpa confoederata* (fig. 3) e dell' *Helicosalpa virgola* (fig. 4), è facile vedere le granulazioni uriche in tutto l'epitelio

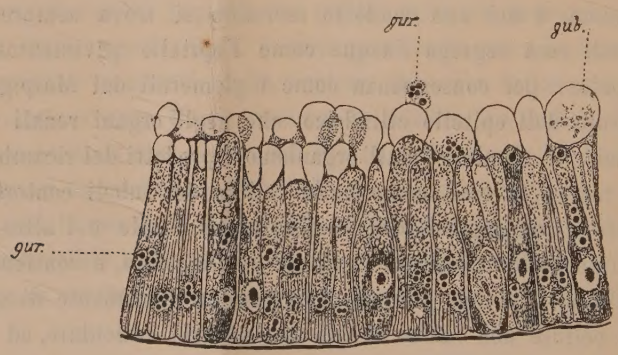


Fig. 4. — Epitelio cilindrico dell'utricolo del 3° paio degli organi renali della *Helico salpa virgola (prol. ag.)*.

gur. Granuli urici rosso-rubino. — *gub.* Granuli urici bruno-giallognoli.

cilindrico renale, ma specialmente in quello degli organi renali del terzo paio, ed in modo più distinto in prossimità allo sbocco di questi ultimi organi, ove le cellule dell'epitelio cilindrico si trovano in tutte le fasi della loro funzione

secretiva, e le granulazioni uriche si mostrano evidenti e caratteristiche, tanto nell'epitelio, quanto nel sottostante mesenchima. Nella *Helicosalpa virgola* tali granulazioni si colorano in rosso rubino, ad eccezione di alcune molto rare che conservano il colorito nero o bruno giallognolo. Viceversa nella *Salpa confoederata* prevalgono le granulazioni bruno-giallognole.

Adunque si vede nel modo più chiaro che i prodotti urici sono eliminati dall'economia animale, mercè la secrezione mucosa delle cellule renali.

Nella prima fase il corpo protoplasmatico di queste cellule si colora da per tutto intensamente, e presenta la struttura reticolare, nelle cui maglie, più o meno strette, si trova il muco segregato. Vi sono in questo muco disseminate qua e là le granulazioni uriche, penetrate dal mesenchima sottostante.

Ma a poco a poco il muco aumenta, e viene ad accumularsi successivamente tutto nella porzione assiale, trascinando con sè le granulazioni uriche. In questa seconda fase la porzione basale si mostra striata longitudinalmente, e nell'estremità libera della porzione assiale delle cellule si veggono i grossi globi di muco, contenenti le granulazioni uriche.

Questi globi mucosi, quando giungono nell'estremità libera delle cellule, sono circondati da un sottile strato di protoplasma, il quale forma una specie di vescicola che, scoppiando, dà luogo alla fuoriuscita del muco contenente le granulazioni uriche. Così mentre il muco si spande a forma di strato sopra l'epitelio, le concrezioni uriche vengono a prender parte principale nella formazione della urina.

Fig. 5. — Epitelio cilindrico dell'utricolo del 3° paio degli organi renali della *Cyclosalpa piumata (prol. ag.)*.

mp. membrana propria.

Anche negli organi renali posteriori della *Cyclosalpa pinnata* (fig. 5) l'epitelio cilindrico ha le sue cellule in tutte le fasi della funzione renale, e quindi presenta le stesse variazioni di struttura come quelle ora descritte nelle specie sopradette; ma le granulazioni uriche sono poco apprezzabili, poichè, come notammo (pag. 407), in questa specie, ed in tutte le altre del gen. *Cyclosalpa*, le concrezioni uriche sono scarsissime ed estremamente fine,

e quindi nelle cellule dell'epitelio cilindrico appaiono solo come una scarsa e fina punteggiatura nera nel fondo bianco che presentano i globi di muco.

Negli organi renali, che sboccano nell'istmo dell'esofago e formano il secondo paio, le cellule dell'epitelio cilindrico, nella prole aggregata della *Helicosalpa virgola* (fig. 6), hanno la porzione basale striata longitudinalmente.

Fig. 6. — Epitelio cilindrico della parte prossimale allo sbocco del 2° paio degli organi renali della *Helicosalpa Virgola (prol. ag.)*.

mp. Membrana propria. — *gub*. Nuclei composti di granuli urici. — *ols*. Orlo libero sfrangiato.

Viceversa il protoplasma della loro porzione assiale è reticolato. In questo protoplasma vi sono vari grossi cumuli di muco, nel cui centro si trovano aggruppate le concrezioni uriche che formano un nucleo di colorito nero. Ma in queste cellule il muco non si concentra tutto; rimane invece sparso nel reticolo protoplasmatico della porzione assiale, che cade più tardi tutta in un *detritus*, il quale si mescola con l'urina contenuta nella cavità dell'organo, come si vede nel tratto epiteliale che segue a quello qui descritto.

Nella *Salpa confoederata* le cellule dell'epitelio cilindrico degli organi renali anteriori, che sboccano ai lati del padiglione esofageo, sono striate longitudinalmente, meno nella base che viene occupata dal nucleo (fig. 7).

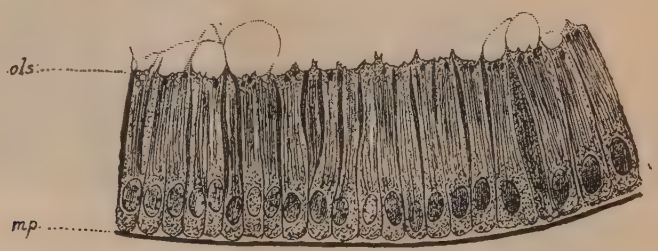


Fig. 7. — Epitelio cilindrico della parete interna (mediale) della vescicola del primo paio degli organi renali della *Salpa confoederata (prol. ag.)*.

mp. Membrana propria. — *ols*. Orlo libero sfrangiato.

L'epitelio cilindrico del tubulo convoluto del terzo paio di organi renali della prole aggregata della *Salpa Tilesii* (fig. 8) è quello che più si avvicina nella sua struttura all'epitelio dei tubuli contorti dei vertebrati. Le cellule sono regolarmente cilindriche e quasi tutte della stessa grandezza; sono striate in tutta la loro lunghezza, dall'estremità basale all'estre-

mità libera, ove ogni stria termina in un punto nodale sotto l'orlo sfrangiato. Questo ricorda l'orlo a spazzola delle cellule dei tuboli contorti del rene dei vertebrati; ma esso non è fatto di ciglia, bensì di sfrangiature protoplasmatiche, derivate dallo scoppio delle vescicole ripiene di muco.

Nel tubolo convoluto del terzo paio d'organi renali della prole aggregata della *Salpa zonaria* e della *Salpa maxima* la struttura dell'epitelio è simile a quella della *Salpa Tilesii*. Nella *Salpa democratica* e nella *Salpa fusiformis* si presentano alcune particolarità che mi riservo descrivere più tardi.

Fig. 8. — Epitelio cilindrico del tubolo convoluto del 3° paio degli organi renali della *Salpa Tilesii (prol. ag.)*.

mp. Membrana propria. — *ols*. Margine sfrangiato. — *sum*. Secreto uro-mucoso.

Intanto da quanto qui brevemente ho comunicato si può concludere che nelle Salpidi si ha la prova diretta dell'eliminazione dei principî specifici dell'urina per mezzo delle cellule dell'epitelio cilindrico degli organi renali, e si acquista la conoscenza del meccanismo, col quale il corpo protoplasmatico di queste cellule compie tale funzione.

Matematica. — *Sulle serie di fattoriali.* Nota II del Socio S. Pincherle.

In una Nota presentata all'Accademia nella seduta del 16 febbraio del corrente anno (1), ho preso a considerare le serie procedenti per funzioni della forma

$$\frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{y(y+1)\dots(y+n-1)},$$

e ne ho dato le condizioni di convergenza dipendentemente dalle variabili

(1) Quella Nota verrà qui citata con I, seguìto dal numero del paragrafo.

x ed y, con qualche maggiore precisione di quanto si faccia ordinariamente (1).

Era necessario di fare precedere quelle considerazioni alle altre, di cui intendo ora occuparmi, di sviluppabilità di una funzione in serie di tal forma. Sono più particolarmente degne d'interesse (per le loro applicazioni, in special modo al calcolo delle differenze finite e allo studio delle relazioni fra le funzioni generatrici e le loro determinanti) le serie procedenti secondo le funzioni

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\dots n},$$

o secondo le

$$\eta_n(x) = \frac{1\,.\,2\,.\,3\dots(n-1)}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$$

Queste ultime sono quelle serie che hanno formato oggetto delle recentissime comunicazioni del sig. Nielsen all'Accademia di Parigi (2), già citate nella precedente nota; le prime, che formano l'argomento della presente Nota, danno pure luogo ad alcune interessanti osservazioni.

1. Di una data successione

$$c_0\,,\ c_1\,,\ c_2\,,\ \dots\ c_n\,,\ \dots \tag{1}$$

si dirà *caratteristica* il massimo limite k (I, § 1) di

$$\frac{\log|c_n|}{\log n}\ (3);$$

la serie $\Sigma\, c_n\, n^{-z}$ è assolutamente convergente per $\mathrm{R}(\varrho) > k+1$ (4); essa non è convergente per $\mathrm{R}(\varrho) < k$.

Assumendo i numeri (1) a coefficienti della serie di fattoriali

$$\sum c_n \binom{x}{n}, \tag{2}$$

si possono presentare i seguenti casi:

(1) Il sig. Bendixson (Acta Math., T. II, pag. 24), ha già avuto occasione di distinguere, per serie procedenti secondo prodotti di fattori lineari, il campo di convergenza semplice da quello di convergenza assoluto.

(2) Comptes Rendus, 30 décembre 1901 et 20 janvier 1902. Sul medesimo argomento v. anche J. C. Kluyver nei medesimi Comptes Rendus, 10 mars 1902 e nel Nieuw Archief voor Wiskunde di Amsterdam: « Over de ontivikkeling van eene functie in eene faculteitenreeks » (S. II, T. IV, 1900).

(3) La caratteristica di (1), aumentata di un'unità, dà ciò che il sig. Hadamard (J. de Mathém., S. IV, T. VIII, 1892, pag. 170 e seg.; e *La série de Taylor*, nella raccolta *Scienzia*, Paris, C. Naud, 1901, pag. 459), chiama *ordine* della serie $\Sigma\, c_n\, z^n$ lungo il cerchio $|z| = 1$.

(4) $\mathrm{R}(x)$ indica sempre la parte reale di x.

O si ha $k = -\infty$; la (2) appartiene allora alla prima classe (I, § 3); essa converge assolutamente ed uniformemente per tutti i valori finiti di x e rappresenta in tutto il piano una funzione intera.

O k è finito; in tal caso la (2) converge assolutamente ed uniformemente per $R(x) > k$ e rappresenta per tali valori di x [1] un ramo ad un valore $\sigma(x)$ di funzione analitica monogena. La serie si riduce ad un numero finito di termini per $x = 0$ o per x intero positivo e rappresenta quindi, in ognuno di tali punti, un numero determinato; tuttavia questi punti non si ascriveranno al campo di convergenza della serie (2), ed i valori che essa assume nei punti stessi possono benissimo non essere quelli della funzione $\sigma(x)$ rappresentata dalla serie (2) nel suo campo di convergenza $R(x) > k$, anche se la funzione $\sigma(x)$ esiste nel campo $R(x) \leq k$.

O infine si ha $k = +\infty$: la (2) non ha campo di convergenza e non rappresenta quindi alcuna funzione analitica di x. Essa ha significato solo per $x = 0$ e per x intero positivo.

2. Qualunque sia quello dei tre casi ora considerati in cui si trova la serie (2), facendovi $x = 0, 1, 2, \ldots n, \ldots$ si otterrà sempre una successione determinata

$$b_0 , b_1 , b_2 , \ldots b_n , \ldots \tag{3}$$

dove b_n è data da

$$b_n = c_0 + n c_1 + \binom{n}{2} c_2 + \cdots + c_n. \tag{4}$$

Inversamente, risolvendo le (4) rispetto a c_n, si otterrà immediatamente la successione (1), data che sia la (3), per mezzo della formula

$$c_n = b_n - n b_{n-1} + \binom{n}{2} b_{n-2} - \cdots + (-1)^n b_0 , \tag{5}$$

che, mediante la notazione usuale del calcolo delle differenze finite, può anche scriversi

$$c_n = \Delta^n b_0 .$$

Sia ora data una funzione analitica $f(x)$ regolare per ogni valore $R(x) \geq 0$, e si formi la successione

$$\Delta^n f(0) .$$

Se questa ammette una caratteristica k che non sia $+\infty$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta^n f(0) \binom{x}{n}$$

[1] Che si diranno costituire il campo di convergenza della serie.

convergerà assolutamente ed uniformemente per $R(x) > k$, e la differenza

$$f(x) - \sum \Delta^n f(0) \binom{x}{n} \tag{6}$$

rappresenterà, per ogni $R(x)$ maggiore del maggiore fra i numeri 0 e k, una funzione analitica regolare, nulla nei punti

$$x = E(k) + 1, \qquad E(k) + 2, \ldots,$$

essendo $E(k)$ il massimo intero contenuto in k.

L' espressione (6) è nulla per $x = 0, 1, 2, \ldots E(k)$, anche se è $E(k) \geq 0$, sebbene per $R(x) \leq k$ essa espressione (6) non rappresenti una funzione analitica.

Può accadere che la differenza (6) sia identicamente nulla: in tal caso la funzione $f(x)$ sarà sviluppabile in serie di fattoriali $\binom{x}{n}$, e se ne conclude intanto che è

« condizione necessaria a che una funzione $f(x)$ sia sviluppabile in serie « di fattoriali, che la caratteristica di $\Delta^n f(0)$ non sia $+\infty$. »

Si può aggiungere ancora che

« condizione necessaria a che una funzione $f(x)$ trascendente intera sia « rappresentabile in tutto il piano da una serie di fattoriali $\binom{x}{n}$, è che la « caratteristica di $\Delta^n f(0)$ sia $-\infty$. »

3. Le considerazioni precedenti conducono naturalmente a chiedere se possono esistere sviluppi dello zero in serie di fattoriali, e di conseguenza, se per una stessa funzione possono esistere più sviluppi di tale forma. L' esistenza di sviluppi dello zero è stata dimostrata dal Frobenius [1] per le serie procedenti secondo funzioni della forma

$$(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n);$$

egli considera più particolarmente il caso in cui $\Sigma |a_n|$ è convergente, ma pure accennandoli, nel § 7 della sua Memoria, per altri casi e in particolare per quello di serie di fattoriali, non costruisce effettivamente, per questo caso, i detti sviluppi dello zero.

Tali sviluppi si possono ottenere direttamente dalle relazioni che abbiamo dal § precedente, nel seguente modo, del tutto elementare.

Dapprima, non può esistere uno sviluppo dello zero

$$\sigma(x) = \sum c_n \binom{x}{n} = 0 \tag{7}$$

[1] Crelle, Bd. LXXIII, pag. 7 (1871).

in cui la caratteristica k di c_n sia negativa, a meno che tutte le c_n non siano nulle. Infatti, se ciò fosse, i punti $x = 0, 1, 2, \ldots n, \ldots$ cadrebbero nel campo di convergenza di (7), e sarebbe pertanto $b_0 = b_1 = \ldots = b_n = 0$, da cui, per le (5), $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$.

Può invece esistere uno sviluppo (7) in cui la caratteristica di c_n sia nulla. In tal caso, $x = 0$ cadendo al contorno del campo di convergenza di (7), può b_0 essere differente da zero, e siccome è ammissibile in (7) la presenza di un moltiplicatore arbitrario costante, si può supporre senza restrizione $b_0 = 1$, da cui $c_n = (-1)^n$.

Si giunge così alla serie

$$\sigma_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{x}{n}.$$

Ora questa rappresenta effettivamente lo zero per ogni $R(x) > 0$: ciò risulta dalla nota formola [1]

$$\frac{1}{x-y} = -\frac{1}{y-1} - \frac{x-1}{(y-1)(y-2)} - \frac{(x-1)(x-2)}{(y-1)(y-2)(y-3)} - \cdots\cdots$$

valida per $R(x) > R(y)$; facendovi $y = 0$, se ne deduce

$$\sigma_0(x) = 1 - x + \binom{x}{2} - \binom{x}{3} + \cdots = 0.$$

Dato un numero positivo k, cerchiamo finalmente se possa esistere uno sviluppo dello zero dato da una serie (7) in cui k sia la caratteristica del sistema c_n dei coefficienti. Sia $m-1$ il massimo intero contenuto in k; i punti $x = 0, 1, \ldots m-1$ non apparterranno allora al campo di convergenza della (7), e quindi si potranno fissare arbitrariamente le $b_0, b_1, \ldots b_{m-1}$, mentre saranno nulle le b_n per $n \geq m$. Ne viene dalle (5),

$$c_n = (-1)^n \left(b_0 - n\, b_1 + \binom{n}{2} b_2 - \cdots + (-1)^{m-1} \binom{n}{m-1} b_{m-1}\right).$$

La serie (7) formata con questi coefficienti essendo una combinazione lineare a coefficienti costanti delle m serie

$$(8) \qquad \sigma_r(x) = \sum_{n=r}^{\infty} (-1)^n \binom{n}{r} \binom{x}{n}, \qquad (r = 0, 1, \ldots m-1),$$

dove i coefficienti hanno per caratteristica r, ne viene che k deve essere uguale precisamente ad $m-1$, cioè ad un numero intero. Di più, si verifica che ognuna delle serie $\sigma_r(x)$ rappresenta effettivamente lo zero per $R(x) > r$,

[1] V. p. es. Bendixson, Mem. cit., pag. 7.

poichè si ha immediatamente

$$\sigma_r(x) = (-1)^r \binom{x}{r} \sigma_0(x-r) \text{ (1).}$$

Esistono dunque, per ogni intero $m-1$, infinite serie (7) convergenti uniformemente ed assolutamente e rappresentanti lo zero per ogni $R(x) > m-1$; queste serie sono combinazioni lineari

$$(9) \qquad b_0 \sigma_0(x) + b_1 \sigma_1(x) + \cdots + b_{m-1} \sigma_{m-1}(x),$$

a coefficienti $b_0, b_1, \ldots b_{m-1}$ arbitrarî, delle serie (8).

Non può esistere uno sviluppo dello zero avente $R(x) > m-1$ per campo di convergenza che non sia della forma (9); abbiasi infatti un tale sviluppo

$$\bar{\sigma}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n \binom{x}{n};$$

deve essere intanto

$$c'_0 + n c'_1 + \binom{n}{2} c'_2 + \cdots + c'_n = 0 \quad \text{per } n \geq m;$$

posto poi

$$b'_0 = c'_0, \; b'_1 = c'_0 + c'_1, \ldots b'_{m-1} = c'_0 + m c'_1 + \binom{m}{2} c'_2 + \cdots + c'_{m-1},$$

si vede subito che la serie

$$b'_0 \sigma_0(x) - b'_1 \sigma_1(x) + \cdots + (-1)^{m-1} b'_{m-1} \sigma_{m-1}(x)$$

coincide colla $\bar{\sigma}(x)$ in tutti i suoi coefficienti.

Risulta da quanto precede che se una funzione $\psi(x)$ ammette uno sviluppo $s(x)$ in serie di fattoriali col campo di convergenza $R(x) > a$, essa non ne ammette altri convergenti in quel campo se è $a < 0$, mentre se è $a \geq 0$, essa ammette nel campo medesimo lo sviluppo più generale

$$(10) \qquad s_1(x) = s(x) + b_0 \sigma_0(x) + b_1 \sigma_1(x) + \cdots b_{m-1} \sigma_{m-1}(x),$$

essendo $m-1$ il massimo intero contenuto in a; e se m' è un intero maggiore di $m-1$, ammette nel campo $R(x) > m'$ lo sviluppo

$$s_2(x) = s_1(x) + b_m \sigma_m(x) + b_{m+1} \sigma_{m+1}(x) + \cdots + b_{m'} \sigma_{m'}(x):$$

le $b_0, b_1, \ldots b_{m'}$ essendo costanti arbitrarie.

Infine, se una funzione uniforme o un ramo uniforme di funzione $\psi(x)$ ha significato per tutto il semipiano $R(x) \geq 0$, ma è rappresentata da una

(1) Per i punti $0, 1, \ldots r-1, r$ posti fuori o al contorno del campo di convergenza la $\sigma_r(x)$ ha rispettivamente i valori $0, 0, \ldots 0, (-1)^r$.

serie $s(x)$ di fattoriali solo nel campo $R(x) > a > 0$, si potrà, considerando la serie (10) $s_1(x)$ più generale che rappresenta la funzione stessa in quel campo, giovarsi dell'indeterminazione delle costanti $b_0, b_1, \dots b_{m-1}$, per fare in modo che i valori assunti da $s_1(x)$ nei punti $0, 1, \dots m-1$, sebbene fuori del campo di convergenza della $s_1(x)$ stessa, coincidano coi valori $\psi(0), \psi(1), \dots \psi(m-1)$ della funzione; basta evidentemente fare

$$b_r = (-1)^r (\psi(r) - s(r)) \ , \ r = 0, 1, 2, \dots m-1 .$$

4. Accanto ad una serie di fattoriali

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \binom{x}{n}$$

si consideri la serie di potenze $\varphi(t)$ di t^{-1}, formata colla stessa successione di coefficienti, in modo che a $t^{-(n+1)}$ sia dato il coefficiente di $\binom{x}{n}$. La successione c_n avendo per caratteristica un numero k che non è l'infinito positivo, la serie $\varphi(t)$ convergerà fuori di un cerchio $t = 0$ e di raggio generalmente uguale all'unità, ma che nel caso di $k = -\infty$ potrà anche essere minore. Diremo che la serie $\varphi(t)$ ammette la caratteristica k.

Fra le due serie $s(x)$, $\varphi(t)$, si viene in tal modo a stabilire una corrispondenza che si indicherà mediante la scrittura

$$s(x) = A(\varphi(t)) ,$$

dove il simbolo A sta a rappresentare un'operazione, manifestamente distributiva, che può venire applicata formalmente ad ogni serie di potenze di t^{-1}

$$\varphi(t) = \sum \frac{c_n}{t^{n+1}} ,$$

ed il cui risultato ha significato, se la caratteristica di c_n è k, per $R(x) > k$. Si aggiungerà l'ipotesi che l'operazione A dia come risultato lo zero qualora venga applicata ad una potenza intera positiva o nulla di t.

Per l'operazione A si verificano immediatamente le due seguenti proprietà:

Se $\varphi'(t)$ è la derivata di $\varphi(t)$, si ha, per $R(x) > k+1$:

$$A(\varphi') = -x\, s(x-1); \tag{11}$$

si ha inoltre:

$$A((1+t)\varphi(t)) = s(x+1) . \tag{12}$$

5. Si tratta ora di dare un'espressione analitica effettiva per l'operazione A. Cominceremo coll'esaminare il caso di $k < -1$, in cui l'espressione di A si troverà senza difficoltà. Infatti, in questo caso, $\varphi(t)$ è assolu-

tamente ed uniformemente convergente lungo la circonferenza di centro $t = 0$ e di raggio 1; pertanto nell'integrale

$$(13) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{(1)} \varphi(t)(1+t)^x\, dt\,,\ \mathrm{R}(x) > 0\,,$$

esteso a questa circonferenza, l'integrazione si può eseguire termine a termine e come risultato si ottiene immediatamente la serie $s(x)$. Onde:

Per le serie $\varphi(t)$ aventi una caratteristica minore di -1, l'operazione $\mathrm{A}(\varphi)$ è, per $\mathrm{R}(x) > 0$, rappresentata dall'integrale definito (13).

La (13), applicata ad una potenza intera positiva o nulla di t, dà zero come risultato.

Le serie $\varphi(t)$ per le quali si realizza in tal modo l'operazione A, formano un insieme lineare, cui si può aggiungere un numero arbitrario di potenze intere positive di t, ed anche una serie di potenze intere positive di t purchè convergente in un cerchio di centro $t = 0$ e di raggio maggiore d'uno. Per queste serie $\varphi(t)$, si verifica immediatamente che l'operazione A, espressa per $\mathrm{R}(x) > 0$ da

$$(14) \qquad \mathrm{A}(\varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(1)} \varphi(t)(1+t)^x\, dt\,,$$

soddisfa alle relazioni (11) e (12), la prima sotto la condizione $\mathrm{R}(x) > 1$, la seconda per $\mathrm{R}(x) > 0$.

6. Conviene ora ricercare se, anche per il caso in cui sia $k \geq -1$, sia possibile una rappresentazione analitica per l'operazione A. A tale uopo ci servirà un principio che, sebbene abbia già trovate numerose applicazioni in varî campi dell'analisi, non pare sia stato ancora enunciato nella sua generalità. Questo principio è il seguente:

Siano A, K due operazioni univocamente definite per gli elementi di un insieme C; sia G la trasformata di K mediante A. Se φ appartiene a C, e vi appartiene anche $\mathrm{K}(\varphi)$, si avrà per definizione

$$\mathrm{AK}(\varphi) = \mathrm{GA}(\varphi)\,,$$

onde

$$(15) \qquad \mathrm{G}^{-1}\mathrm{AK} = \mathrm{A}\,.$$

Supponiamo ora che φ appartenga ad un campo C′ che comprende C, ma non necessariamente a C stesso; che K sia applicabile a φ, e che $\mathrm{K}(\varphi)$ appartenga a C. Sotto questa ipotesi, il primo membro della (15) si potrà assumere come definizione dell'operazione A per gli elementi dell'insieme più esteso C′, e si verificherà in generale che l'operazione A, così estesa, mantiene nel nuovo campo le sue proprietà formali.

Il principio ora enunciato è quello che viene applicato in sostanza nella continuazione analitica secondo il Weierstrass; nel classico teorema di Mittag-Leffler per la costruzione di una funzione uniforme con date singolarità; nella sommabilità delle serie secondo il Borel e nei varî tentativi fatti per l'interpretazione delle serie divergenti; nell'integrazione finita, data dal Guichard, di una funzione trascendente intera, ecc. Di questo principio ci gioveremo ora per ottenere l'espressione analitica dell'operazione A per tutte le serie $\varphi(t)$ appartenenti a caratteristica finita.

7. Da ogni serie di potenze di t^{-1}

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{t^{n+1}}$$

si può dedurre la serie

$$K_m(\varphi) = (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(n+1)(n+2)\dots(n+m)\, t^{n+1}};$$

questa deduzione è fatta mediante un'operazione distributiva che diremo K_m, la quale non è altro che la $D^{-m} \frac{1}{t^m} \varphi$, dove D è il simbolo di derivazione, quando si facciano nulle le costanti introdotte dall'integrazione. L'operazione K_m ha evidentemente la proprietà di diminuire di m unità la caratteristica cui appartiene φ; se φ ha la caratteristica k, $K_m(\varphi)$ avrà la caratteristica $k - m$.

Sia φ una tale serie di potenze che le sia applicabile l'operazione A definita al § 4; essa operazione sarà a fortiori applicabile alla serie $K_m(\varphi)$: si vuole vedere quale sia la trasformata di K_m mediante A. Usando, a questo uopo, i soliti simboli del calcolo delle differenze finite Δ e θ [1], si deduce dalla proprietà (12) della A, che se $A(\varphi) = s(x)$, sarà:

$$A(t\varphi(t)) = \Delta s(x), \quad A(t^{-1}\varphi(t)) = \Delta^{-1} s(x),$$

e dalla (11), che

$$AD^{-1}\varphi(t) = -\frac{1}{x+1}\theta s(x).$$

Ne viene

$$AD^{-m}\left(\frac{1}{t^m}\varphi(t)\right) = \frac{(-1)^m}{(x+1)(x+2)\dots(x+m)}\theta^m \Delta^{-m} s(x)$$

e quindi la trasformata G_m di K_m mediante A è

$$G_m = \frac{(-1)^m}{(x+1)(x+2)\dots(x+m)}\theta^m \Delta^{-m},$$

[1] $\Delta\psi(x) = \psi(x+1) - \psi(x)$; $\theta\psi(x) = \psi(x+1)$; Δ^{-1} è l'operazione d'integrazione finita, o inversa di Δ.

onde

$$G_m^{-1} = (-1)^m \Delta^m x(x-1)\dots(x-m+1)\,\theta^{-m}.$$

Con ciò, la (15) ci dà

$$A = (-1)^m \Delta^m x(x-1)\dots(x-m+1)\,\theta^{-m}\,AK_m. \tag{16}$$

Ora, se $\varphi(t)$ è una serie di caratteristica minore di -1, le si può applicare, per $R(x) > 0$, l'operazione A rappresentata dall'integrale definito (14), e la (16) non è altro che una semplice identità. Invece, se $\varphi(t)$ ha una caratteristica $k \geq -1$, sia $m-2$ il massimo intero contenuto in k; la serie $K_m(\varphi)$ avrà per caratteristica un numero minore di -1 e le sarà quindi applicabile per $R(x) > 0$ l'operazione A sotto forma d'integrale definito, ottenendosi

$$AK_m\,\varphi = (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(n+1)(n+2)\dots(n+m)} \binom{x}{n};$$

da cui

$$(-1)^m x(x-1)\dots(x-m+1)\,\theta^{-m}\,AK_m = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \binom{x}{n+m},$$

e infine, poichè $\Delta \binom{x}{n} = \binom{x}{n-1}$:

$$(-1)^m \Delta^m x(x-1)\dots(x-m+1)\,\theta^{-m}\,AK_m = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \binom{x}{n}.$$

L'operazione A definita dalla (16), cioè data, per $R(x) > m$, da

$$A(\varphi) = \frac{(-1)^m}{2\pi i} \Delta^m x(x-1)\dots(x-m+1) \int_{(1)} D^{-m}\left(\frac{1}{t^m}\varphi(t)\right)(1+t)^{x-m}\,dt, \tag{17}$$

coincide dunque coll'operazione A definita in principio del § 4 per ogni serie $\varphi(t)$ avente caratteristica k finita, e quindi per ogni tale serie l'operazione A ivi definita ammette l'espressione analitica (17), dove m è il massimo intero contenuto in k aumentato di 2, se è $k \geq -1$, ed è zero se è $k < -1$.

In questo modo, ad ogni serie di fattoriali $s(x)$ della prima o della seconda classe corrisponde una funzione analitica $\varphi(t)$ regolare nell'intorno di $t = \infty$, che si costruisce immediatamente e mediante la quale si ha l'espressione analitica (17) della $s(x)$.

È facile vedere che a $\varphi(t) = (1+t)^{-m}$ per un intero positivo, la (17) fa corrispondere gli sviluppi dello zero già ottenuto per altra via al § 3.

Ad ogni proprietà di carattere lineare della $\varphi(t)$, le relazioni (11) e (12) cui soddisfa l'operazione A fanno corrispondere proprietà pure di carattere lineare per la $s(x)$. Di questa corrispondenza, della sua applicazione alle equazioni alle differenze, come pure del significato da attribuire alle serie $s(x)$ della terza classe, tratterò in una prossima Nota.

Meccanica. — *Sopra alcuni particolari movimenti di un punto in un piano.* Nota II di E. Daniele, presentata dal Socio Volterra.

6. Facendo seguito alla Nota pubblicata col medesimo titolo nel fascicolo precedente dei Rendiconti di questa R. Accademia, osserveremo che *il calcolo della funzione* θ, *che ci dà, eguagliata ad una costante, tutte le traiettorie del punto, richiede,* come risulta dalle formole (8) e (9), *due sole quadrature.* È un risultato che dovevamo attenderci, appena si fosse osservato quali sono le superficie per cui il problema delle geodetiche equivale a quello delle traiettorie nel nostro movimento piano. L'elemento lineare di queste superficie è dato, come è noto, da

$$ds^2 = 2U\,(dx^2 + dy^2);$$

calcolandone la curvatura totale K, si trova

$$K = -\frac{1}{2U}\,\Delta_2 \lg U = 0.$$

Il problema di movimento che abbiamo studiato nel piano equivale dunque alla ricerca delle geodetiche sopra una superficie sviluppabile: ora si sa appunto che sopra una tale superficie le geodetiche si ottengono con due quadrature.

A completare la risoluzione del problema meccanico manca il calcolo del tempo. A questo riguardo il metodo di Jacobi non si può più, nel caso attuale, applicare. Ed invero si dovrebbe, secondo Jacobi, calcolare la derivata di θ rispetto ad h (cost. delle forze vive) supposto di averla lasciata indeterminata in θ, ed il tempo verrebbe allora dato da

$$t_0 - t = \frac{\partial \theta}{\partial h}.$$

Ma siccome noi abbiamo posto fin dal principio $h = 0$, così in θ il parametro h non figura affatto. Ad ogni modo per avere il tempo non vi sarà che da eseguire una quadratura, dal momento che si conoscono tutte le traiettorie.

7. Applicheremo la teoria precedente allo studio del moto di un punto attratto (o respinto) da un centro fisso. Bisognerà anzitutto vedere quale sia la forma della funzione potenziale nel caso da noi considerato, in cui le traiettorie del punto si possono distribuire in infiniti sistemi ortogonali isotermi.

Poichè nell'ipotesi delle forze centrali la funzione potenziale dipende soltanto dalla distanza del punto mobile dal punto fisso, indicando con r

questa distanza, e posto

$$U = f(r),$$

occorrerà determinare $f(r)$ in modo che si abbia

$$\Delta_2 \lg f(r) = 0 ,$$

equazione che sviluppata diventa

$$\frac{d^2}{dr^2} \lg f(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \lg f(r) = 0 .$$

Da questa con una prima integrazione otteniamo

$$\frac{d}{dr} \lg f(r) = \frac{c}{r} ,$$

ed integrando una seconda volta si ha

$$U = f(r) = Cr^c : \tag{12}$$

c e C sono due costanti arbitrarie.

La forza applicata sarebbe poi di intensità

$$F = Ccr^{c-1} .$$

Adunque: *nel moto di un punto soggetto a forze centrali si potranno distribuire le traiettorie in infiniti sistemi ortogonali* (*isotermi*) *quando la funzione potenziale* (*e quindi anche la forza applicata*) *è proporzionale ad una potenza, del resto qualunque, della distanza del punto mobile dal punto fisso.*

Troviamo ora l'equazione in termini finiti delle traiettorie. Si ha dalla (12):

$$\frac{\partial \lg U}{\partial x} = \frac{cx}{r^2} , \quad \frac{\partial \lg U}{\partial y} = \frac{cy}{r^2} ,$$

onde

$$\int \left(\frac{\partial \lg U}{\partial x} dy - \frac{\partial \lg U}{\partial y} dx \right) = c \int \frac{x dy - y dx}{r^2} = c \operatorname{arctg} \frac{y}{x} ,$$

e quindi le (8) diventano:

$$\theta_1 = K r^{k-1} \operatorname{sen} \left\{ a + (k-1) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right\}$$

$$\theta_2 = K r^{k-1} \cos \left\{ a + (k-1) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right\} ,$$

avendo posto

$$c = 2(k-1) , \quad \sqrt{2C} = K . \tag{13}$$

Per ottenere θ converrà riferirsi a coordinate polari, assumendo

$$x = r\cos\omega\,, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\omega\,,$$

ed in conseguenza

$$dx = \cos\omega\,dr - r\,\mathrm{sen}\,\omega\,d\omega\,, \qquad dy = \mathrm{sen}\,\omega\,dr + r\cos\omega\,d\omega\,;$$

per cui si avrà

$$\theta = \mathrm{K}\int r^{k-1}\{\mathrm{sen}\,(a+k\omega)\,dr + r\cos(a+k\omega)\,d\omega\}\,. \tag{14}$$

8. Supponiamo dapprima $k \neq 0$. Eseguendo la quadratura nella (14) abbiamo

$$\theta = \frac{\mathrm{K}}{k}\,r^k\,\mathrm{sen}\,(a+k\omega)\,;$$

l'equazione delle traiettorie $\theta = \text{cost.}$ diventa dunque

$$r^k\,\mathrm{sen}\,(a+k\omega) = b\,, \tag{15}$$

dove a e b sono costanti arbitrarie (cioè variano da una traiettoria all'altra), mentre k è fissa per tutte queste curve, potendo però avere un valore qualunque diverso da zero.

Accanto all'equazione (15) delle traiettorie scriviamo anche le espressioni della funzione potenziale e della forza, sostituendo, mediante le (13), la costante k a c:

$$\mathrm{U} = \mathrm{C}\,r^{2(k-1)}\,, \qquad \mathrm{F} = 2\mathrm{C}\,(k-1)\,r^{2k-3}\,.$$

Per avere infine il tempo si ricorrerà all'integrale delle forze vive

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2\mathrm{U}\,,$$

che si scrive, nel caso attuale,

$$\frac{dr^2 + r^2 d\omega^2}{dt^2} = 2\mathrm{C}\,r^{2(k-1)}\,.$$

Questa equazione si può trasformare, mediante la (15), in una relazione fra dt, $d\omega$, ω, oppure fra dt, dr, r, e così si ottiene il tempo con una sola quadratura dall'una o dall'altra delle seguenti due formole:

$$dt = \frac{m\,d\omega}{\{\mathrm{sen}\,(a+k\omega)\}^{\frac{2}{k}}} = \frac{nr\,dr}{\sqrt{r^{2k} - b^2}}$$

dove m e n contengono la costante arbitraria b.

Suppongasi, ad es., $k = \frac{1}{2}$; la funzione potenziale diventa

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{C}}{r}\,,$$

e siamo nel caso dell'attrazione Newtoniana. Le traiettorie hanno per equazione

$$\sqrt{r}\,\mathrm{sen}\,(a+\frac{\omega}{2}) = b\,,$$

ovvero

$$r = \frac{2\,b^2}{1-\cos\,(2\,a+\omega)}$$

e sono parabole col fuoco nel punto attraente, come dovevamo attenderci. Si ha pure il significato delle costanti a e b: quest'ultima determina il parametro delle varie parabole, mentre la prima definisce l'inclinazione del loro asse sull'asse polare.

Questo esempio ci ha così condotti a trovare un sistema ortogonale isotermo composto di sole parabole: esso è formato di tutte le parabole aventi lo stesso fuoco e lo stesso asse; quelle dell'una famiglia volgono tutte la concavità da una stessa parte, quelle dell'altra famiglia volgono la concavità dalla parte opposta. Facendo poi rotare tutto il sistema di un giro completo intorno al fuoco, si avranno tutte le traiettorie di un punto attratto (o respinto) da un punto fisso colla legge di Newton, quando la costante delle forze vive sia nulla.

9. Consideriamo da ultimo il caso in cui sia $k = 0$. La (14) allora diventa

$$\theta = \mathrm{K}\int\frac{1}{r}\,(\mathrm{sen}\,a\,dr + r\cos a\,d\omega)\,,$$

e integrando, si ha come equazione delle traiettorie $\theta = \mathrm{cost.}$:

$$\mathrm{sen}\,a\,\lg r + \omega\cos a = b\,,$$

ovvero

$$r = e^{\frac{b}{\mathrm{sen}\,a}}\,e^{-\omega\,\mathrm{cotg}\,a}\,.$$

Esse sono dunque spirali logaritmiche, e se ne ottiene un sistema isotermo tenendo fissa la costante a e facendo variare b. Le curve di questo sistema sono tutte eguali fra di loro, e quelle di una medesima famiglia non differiscono l'una dall'altra che per una rotazione intorno al polo. Fra gli altri sistemi isotermi si avrà pure quello formato dalle rette per il polo ($a = 0$) e dalle circonferenze col centro in questo medesimo punto $\left(a = \frac{\pi}{2}\right)$.

La funzione potenziale e la forza in questo movimento sono

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{C}}{r^2}\,,\quad \mathrm{F} = -\frac{2\mathrm{C}}{r^3}\,,$$

e il tempo è dato da

$$t - t_0 = M\,(e^{-2\omega\cot g\,a} - e^{-2\omega_0\cot g\,a}) = N\,(r^2 - r_0^2)\,,$$

dove s'è posto

$$M = -N\,e^{\frac{2b}{\operatorname{sen} a}},\quad N = \frac{1}{2\sqrt{2C}\cos a}$$

e quindi M e N dipendono la prima dai parametri a e b, la seconda soltanto da a.

Geodesia. — *Determinazioni astronomiche di latitudine e di azimut eseguite a Roma (S. Pietro in Vincoli), a M. Cimino ed a M. Peglia negli anni 1900 e 1901.* Nota del prof. V. Reina, presentata dal Socio A. Ferrero.

In alcune Note, inserite nei Rendiconti di questa Accademia, venne già reso conto delle operazioni astronomiche eseguite sui punti trigonometrici di primo ordine circostanti a Roma, allo scopo di determinarvi l'attrazione locale. I risultati conseguiti mi indussero ad estendere la ricerca ai punti della rete trigonometrica che cadono in prossimità del meridiano di Roma, per determinare il profilo del Geoide lungo il meridiano stesso.

La necessità di trasportare gli strumenti in punti sempre più lontani, e di difficile accesso, mi persuase a semplificare quanto più fosse possibile i procedimenti di osservazione, ed in particolare a ricercare se il metodo di determinazione della latitudine colla misura delle distanze zenitali meridiane di stelle fondamentali culminanti a Nord ed a Sud dello zenit, non potesse venire vantaggiosamente sostituito a quello precedentemente impiegato, delle osservazioni circummeridiane. Oltre ad una grande riduzione nei calcoli, ne sarebbe conseguita una notevole semplificazione nell'impianto della stazione, potendo sopprimere l'uso del cronografo.

Nell'ottobre e novembre 1900 tale metodo venne perciò assoggettato ad un esame dettagliato e minuto nella Specola di S. Pietro in Vincoli, risultandone in me la convinzione che esso sia da preferirsi a quello classico delle osservazioni circummeridiane, quando venga usato colle dovute avvertenze e cautele. In tale occasione venne anche effettuata una determinazione dell'azimut di M. Mario rispetto alla Specola.

Nel luglio ed agosto 1901 si eseguirono le due stazioni di M. Cimino e M. Peglia, che si presentano successivamente lungo il meridiano al nord di M. Soratte. A M. Peglia, come nuovo controllo del metodo dei passaggi meridiani, la latitudine venne determinata anche con osservazioni circummeridiane.

Nell'effettuare i calcoli relativi alle tre stazioni, alle posizioni apparenti delle stelle osservate vennero applicate le « correzioni provvisorie » di Auwers. I risultati di tali calcoli sono qui riassunti.

Stazione a Roma (S. Pietro in Vincoli).

Latitudine (risultante da 240 osservazioni meridiane di 40 stelle)

$$\varphi = 41°.53'.35''.37 \pm 0''\,08 \qquad \text{(Epoca 1900. 85)}$$

Azimut della direzione S. Pietro in Vincoli - M. Mario (media di 96 determinazioni)

$$A = 315°.20'.19''.42 \pm 0''.17 \qquad \text{(Epoca 1900. 82)}$$
$$dA = +0{,}33\, d\alpha^s - 0{,}01\, d\delta'' - 0{,}01\, d\varphi''$$

Stazione a M. Cimino.

Latitudine (risultante da 246 osservazioni meridiane di 50 stelle)

$$\varphi = 42°.24'.31''.09 \pm 0'',06 \qquad \text{(Epoca 1901. 54)}$$

Azimut della direzione M. Cimino - M. Soratte (media di 72 determinazioni)

$$A = 125°.53'.57''.49 \pm 0''.27 \qquad \text{(Epoca 1901. 53)}$$
$$dA = -0{,}02\, d\alpha^s - 1{,}18\, d\delta'' + 0{,}02\, d\varphi''$$

Stazione a M. Peglia.

Latitudine (risultante da 193 osservazioni meridiane di 60 stelle, e da 65 doppie osservazioni circummeridiane)

$$\varphi = 42°.49'.09''.36 \pm 0''.06 \qquad \text{(Epoca 1901. 58)}$$

Azimut della direzione M. Peglia - M. Cimino (media di 72 determinazioni)

$$A = 180°.51'.52''.36 \pm 0''.25 \qquad \text{(Epoca 1901. 57)}$$
$$dA = +0{,}06\, d\alpha^s - 1{,}08\, d\delta'' + 0{,}02\, d\varphi''$$

Se si applicano le correzioni di Auwers anche alle determinazioni astronomiche fatte negli anni precedenti (valendosi delle espressioni differenziali che, nelle precedenti pubblicazioni, vennero registrate di fianco ai singoli risultati), e si mettono a raffronto le coordinate astronomiche con quelle geodetiche, ordinando tutto per latitudini crescenti, si ottiene il seguente specchio:

STAZIONE	Latitudine astronomica φ_a	Latitudine geodetica φ_g	Azimut astronomico A_a	Azimut geodetico A_g	$\varphi_a - \varphi_g$	$A_a - A_g$	Epoca
M. Pisarello	41°.28′.36″.03	36″.24	15°.28′.57″.07	58″.96	−0″.21	−1″.89	1899.5
M. Cavo	41. 45. 03. 42	2. 12	. . . .	. .	+1. 30	. .	1898.5
Fiumicino	41. 46. 14. 59	12. 86	47. 29. 36. 67	38. 57	+1. 73	−1. 90	1898.6
S. Pietro in Vincoli.	41. 53. 35. 37	33. 39	315. 20. 19. 42	21. 11	+1. 98	−1. 69	1900.8
M. Mario	41. 55. 26. 25	24. 38	131. 50. 32. 29	33. 08	+1. 87	−0. 79	1898.3
M. Soratte	42. 14. 46. 38	40. 76	186. 36. 58. 56	61. 48	+5. 62	−2. 92	1900.5
M. Cimino	42. 24. 31. 09	24. 75	125. 53. 57. 49	59. 72	+6. 34	−2. 23	1901.5
M. Peglia	42. 49. 09. 36	2. 73	180. 51. 52. 36	54. 34	+6. 63	−1. 98	1901.6

Le coordinate geodetiche, calcolate dall' Istituto Geografico Militare, provengono dal segnale trigonometrico di Castanea. L'ellissoide di riferimento ha le dimensioni di Bessel.

Per rendere fra loro confrontabili le deviazioni in latitudine ed azimut determinate in corrispondenza ad epoche diverse, converrebbe ancora ridurle alla posizione media del Polo. Ma ciò non si può fare per le determinazioni posteriori alla fine del 1899, ancora non essendo stato pubblicato dal *Centralbureau der Internationalen Erdmessung* il relativo rapporto cogli elementi di riduzione. Il precedente specchio basta però per mostrare qual è l'andamento generale della verticale. Mentre la deviazione in azimut si conserva pressochè costante, la deviazione in latitudine va aumentando, procedendo verso il Nord, rivelando una progressiva depressione del Geoide al di sotto dell'ellissoide di riferimento.

È mia intenzione, nella prossima stagione estiva, spingendomi ancora al Nord, di eseguire le stazioni di Alta S. Egidio (Toscana), M. Carpegna (Marche) e Bertinoro (Romagna), e di pervenire quindi alla valle del Po, superando l'Appennino.

La redazione di un lavoro completo e dettagliato, che renda conto del complesso delle operazioni eseguite lungo il meridiano di Roma, si rimetterà all'epoca in cui saranno compiuti i calcoli relativi alle nuove stazioni.

Meccanica. — *Sul problema generale della sismografia.* Nota II del dott. M. Contarini, presentata dal Socio V. Cerruti.

In una Nota precedente (1) ho stabilita l'equazione simbolica dei lavori virtuali relativa a una catena di corpi rigidi, fissati, almeno per un punto, il primo al terreno e gli altri ciascuno al precedente: ora, applicando i risultati ottenuti, mi propongo di studiare il caso particolare di due corpi soli, cercando specialmente di trarre quelle conseguenze che possono avere appli-

(1) V. seduta del 4 maggio, pag. 380.

cazione nella teoria matematica degli strumenti sismici. — Per ciò che riguarda il significato delle lettere e dei simboli che verranno usati in appresso, mi riferisco senz'altro al lavoro testè citato.

6. Dalla equazione (8) si ricava per il caso attuale l'equazione

$$(9) \qquad \sum_{1}^{2}{}_r (\mathrm{H}_r\,\delta\lambda_r + \mathrm{K}_r\,\delta\mu_r + \mathrm{L}_r\,\delta\nu_r) = 0\,;$$

essendo (vedi le equazioni (E) (E') a pag. 385).

$$(G) \quad \begin{cases} \mathrm{H}_1 = \sum_{C_1 i}(\eta_{1i}-\eta_{10})(Z_{1i}-m_{1i}\zeta''_{1i}) + (\eta_{11}-\eta_{10})\sum_{C_2 i}(Z_{2i}-m_{2i}\zeta''_{2i}) \\ \quad -\sum_{C_1 i}(\zeta_{1i}-\zeta_{10})(H_{1i}-m_{1i}\eta''_{1i}) - (\zeta_{11}-\zeta_{10})\sum_{C_2 i}(H_{2i}-m_{2i}\eta''_{2i}),\ \text{etc.} \\ \mathrm{H}_2 = \sum_{C_2 i}(\eta_{2i}-\eta_{20})(Z_{2i}-m_{2i}\zeta''_{2i}) - \sum_{C_2 i}(\zeta_{2i}-\zeta_{20})(H_{2i}-m_{2i}\eta''_{2i}),\ \text{etc.} \end{cases}$$

Come fu già osservato, queste equazioni valgono qualunque siano le forze, qualunque sia l'ordine di grandezza delle traslazioni ξ, η, ζ, e comunque siano orientati i varî sistemi di assi, purchè tutti rispettivamente paralleli nel caso di rotazioni nulle.

Supponiamo ora:

1° che nei punti $\mathrm{P}_{r1}(a_r\,b_r\,c_r)$ siano applicate delle forze *infinitesime* di componenti Ξ_{r1}, H_{r1}, Z_{r1}; nei baricentri $\mathrm{P}_{r2}(x_{r2}, y_{r2}, z_{r2})$ delle forze *finite* di componenti Ξ_{r2}, H_{r2}, Z_{r2}; e intorno alle origini P_{r0} due coppie di momento infinitesimo, alle quali potremo sempre sostituire due sistemi di forze eguali ed opposte, applicate nei punti opposti $\pm x_{r3}$, $\pm y_{r3}$, $\pm z_{r3}$, di componenti $\pm \Xi_{r3}$, $\pm H_{r3}$, $\pm Z_{r3}$;

2° che le accelerazioni traslatorie ξ'', η'', ζ'' siano dell'ordine di grandezza delle rotazioni, cioè infinitesime;

3° che gli assi fissi nei corpi siano rispettivamente paralleli ai loro assi principali d'inerzia, e di più uno d'essi passi per il rispettivo baricentro: cosicchè valgono le identità

$$(H) \qquad \sum_{C_r i} m_{ri}\,x_{ri}\,y_{ri} = 0,\ \text{etc.}$$

Allora, ricordando le (1'), (1''), (1'''), facendo le posizioni

$$(K) \qquad \mathrm{M}_r^{(x)} = \sum_{C_r i} m_{ri}\,(y_{ri}^2 + z_{ri}^2),\ \text{etc.},$$

e trascurando tutti i termini di secondo grado nelle quantità infinitesime, le (G) dànno:

$$
\begin{aligned}
H_1 = {} & b_1 (Z_{11} + Z_{21} + Z_{22} - \pi_1 H_{22}) - c_1 (H_{11} + H_{21} + H_{22} + \pi_1 Z_{22}) \\
& + Z_{12} (y_{12} + \varrho_1 x_{12} - \pi_1 z_{12}) - H_{12} (z_{12} + \pi_1 y_{12} - \chi_1 x_{12}) \\
& + a_1 (\varrho_1 Z_{22} + \chi_1 H_{22}) + 2 Z_{13} y_{13} - 2 H_{13} z_{13} - \pi_1'' M_1^{(\infty)} \\
& + M_2 (\eta'' + \varrho_1'' a_1 - \pi_1'' c_1 + \varrho_2'' x_{22} - \pi_2'' z_{22}) + \eta'' z_{12} M_1 \\
& - M_2 (\zeta'' - \chi_1'' a_1 + \pi_1'' b_1 - \chi_2'' x_{22} + \pi_2'' y_{22}) - \zeta'' y_{12} M_1 , \text{ etc.} \\
H_2 = {} & Z_{21} b_2 - H_{21} c_2 + Z_{22} (y_{22} + \varrho_2 x_{22} - \pi_2 z_{22}) - H_{22} (z_{22} + \pi_2 y_{22} - \chi_2 x_{22}) \\
& + 2 Z_{23} y_{23} - 2 H_{23} z_{23} \\
& - \pi_2'' M_2^{(\infty)} + M_2 [z_{22} (\eta'' + \varrho_1'' a_1 - \pi_1'' c_1) - y_{22} (\zeta'' + \pi_1'' b_1 - \chi_1'' a_1)] \text{ etc.}
\end{aligned}
\qquad (G_1)
$$

7. Si tratti ora di due pendoli sferici, cosicchè il sistema ammette 6 gradi di libertà. Questi siano sospesi in modo che gli assi delle z_r passino per i punti P_{r1} e per i baricentri P_{r2}; cioè sia

$$
\left.
\begin{aligned}
a_r &= b_r = 0 ; \\
x_{r2} &= y_{r2} = 0 ; \quad z_{r2} = l_r
\end{aligned}
\right\} \quad (r = 1, 2).
$$

Le forze applicate nei baricentri siano appunto i pesi dei due pendoli, cosicchè le loro componenti secondo gli assi fissi sono:

$$
\Xi_{r2} = H_{r2} = 0 , \quad Z_{r2} = M_r g ,
$$

supponendo l'asse delle ζ diretto secondo la gravità.

Le coppie intorno ai punti di sospensione agiscano costantemente in un piano normale agli assi delle z_r, cosicchè si possono sostituire a ciascuna d'esse due forze d'intensità $\pm \tau_r$ parallele agli assi delle x_r e applicate in due punti dell'asse delle y_r distanti dall'origine per l'unità di lunghezza. Notando che queste forze sono infinitesime e quindi differiscono per quantità trascurabili dalle loro componenti secondo gli assi fissi, queste ipotesi si esprimono mediante le identità:

$$
\begin{aligned}
x_{r3} = z_{r3} = 0 \quad , \quad & y_{r3} = \pm 1 \\
\Xi_{r3} = \pm \tau_r \quad , \quad & H_{r3} = Z_{r3} = 0 .
\end{aligned}
$$

Poniamo infine per semplicità

$$
\Xi_{r1} = f_r \quad , \quad H_{r1} = \varphi_r .
$$

Allora, ferme restando tutte le ipotesi restrittive fin qui enunciate, dalle (G_1) si arriva alle

$$
(G_2) \quad \left\{
\begin{aligned}
- H_1 = {} & - \eta'' (M_1 l_1 + M_2 c_1) + \pi_1'' (M_2 c_1^2 + M_1^{(\infty)}) + \pi_2'' M_2 l_2 c_1 + \\
& + \pi_1 g (M_2 c_1 + M_1 l_1) + c_1 (\varphi_1 + \varphi_2) \\
- K_1 = {} & + \xi'' (M_1 l_1 + M_2 c_1) + \chi_1'' (M_2 c_1^2 + M_1^{(y)}) + \chi_2'' M_2 l_2 c_1 + \\
& + \chi_1 g (M_2 c_1 + M_1 l_1) - c_1 (f_1 + f_2) \\
- L_1 = {} & \varrho_1'' M_1^{(z)} + 2 \tau_1
\end{aligned}
\right.
$$

$$(G_2') \quad \begin{cases} -H_2 = -\eta'' M_2 l_2 + \pi_1'' M_2 l_2 c_1 + \pi_2'' M_2^{(x)} + \pi_2 g M_2 l_2 + c_2 \varphi_2 \\ -K_2 = +\xi'' M_2 l_2 + \chi_1'' M_2 l_2 c_1 + \chi_2'' M_2^{(y)} + \chi_2 g M_2 l_2 - c_2 f_2 \\ -L_2 = \varrho_2'' M_2^{(z)} + 2 \tau_2 \end{cases}$$

8. Queste equazioni valgono qualunque siano le masse e le dimensioni dei due corpi. Supponiamo ora che il primo si riduca a un filo flessibile e inestendibile, di massa trascurabile rispetto a quella del secondo, di lunghezza c_1 e con gli estremi nei punti P_{10}, P_{11}. Tali ipotesi si esprimono sopprimendo nelle (G_2) tutti i termini contenenti la massa o i momenti d'inerzia del corpo C_1. Così appunto facendo, osservando che la natura dei legami consente il massimo grado di libertà, sostituendo a π_r, χ_r, ϱ_r e alle loro derivate i valori ricavati dalle (F), e separando i termini che non dipendono esplicitamente dalle incognite mediante le posizioni:

$$(L) \quad \begin{cases} c_1 (\mu_1'' M_2 c_1 + \mu_2'' M_2 l_2 + \mu_1 g M_2 - f_1 - f_2) = c_1 \Phi_1 \\ c_1 (\lambda_1'' M_2 c_1 + \lambda_2'' M_2 l_2 + \lambda_1 g M_2 + \varphi_1 + \varphi_2) = c_1 \Psi_1 \end{cases}$$

$$(L') \quad \begin{cases} \mu_1'' M_2 l_2 c_1 + \mu_2'' M_2^{(y)} + \mu_2 M_2 l_2 g - f_2 c_2 = l_2 \Phi_2 \\ \lambda_1'' M_2 l_2 c_1 + \lambda_2'' M_2^{(x)} + \lambda_1 M_2 l_2 g + \varphi_2 c_2 = l_2 \Psi_2 \\ \nu_2'' M_2^{(z)} + 2 \tau_2 = X_2 , \end{cases}$$

si arriva infine alle equazioni effettive del moto:

$$(10) \quad \begin{cases} \xi'' M_2 + \beta'' M_2 (c_1 + l_2) + \beta g M_2 + \Phi_1 = 0 \\ -\eta'' M_2 + \alpha'' M_2 (c_1 + l_2) + \alpha g M_2 + \Psi_1 = 0 \end{cases} (1)$$

$$(10') \quad \begin{cases} \xi'' M_2 + \beta'' \left(M_2 c_1 + \dfrac{M_2^{(y)}}{l_2} \right) + \beta g M_2 + \Phi_2 = 0 \\ -\eta'' M_2 + \alpha'' \left(M_2 c_1 + \dfrac{M_2^{(x)}}{l_2} \right) + \alpha g M_2 + \Psi_2 = 0 \\ \gamma'' M_2^{(z)} + X_2 = 0 . \end{cases}$$

Se in queste equazioni si suppongono note tutte le costanti e si possono determinare in funzione del tempo tutte le variabili (forze — rotazioni apparenti) che compariscono nelle funzioni $\Phi_1, \ldots, X_2$, è facilissimo procedere all'integrazione del sistema. Basta infatti seguire il metodo già da me esposto in un'altra pubblicazione (2), sul quale, appunto per ciò, non mi dilungo.

(1) Come si vede, è omessa a bella posta l'equazione $L_1 = 0$, relativa alla rotazione del primo corpo intorno al proprio asse verticale: infatti tale equazione non ha più significato per un corpo filiforme, quale è appunto C_1.

(2) *Sulla determinazione dei moti sismici.* Nota II; Rendic. d. A. d. Lincei, 17 marzo 1901, pag. 205.

9. Alle condizioni teoriche successivamente enunciate fin qui, si approssimerebbero con sufficiente esattezza gli ordinarî pendoli verticali usati in sismografia, purchè vi si apportassero le seguenti modificazioni:

1° un filo di sospensione abbastanza lungo, rispetto al suo diametro, per poter trascurare la curvatura ch' esso subisce, flettendosi, verso le estremità;

2° una massa pendolare costituente un corpo praticamente rigido (1);

3° un sistema di leve, analoghe a quelle applicate alla massa pendolare, che decomponga, amplifichi e registri anche il movimento dell' estremità inferiore del filo di sospensione.

Un tale strumento infatti, oltre alle condizioni geometriche e cinematiche, può soddisfare anche alle restrizioni imposte alle forze nei nn. 6 e 7, perchè: 1° nell' estremità inferiore del filo (P_{11}) e in un punto P_{21} della massa rigida agiscono le resistenze dovute alle leve scriventi, all' aria e alla *flessione* del filo di sospensione, resistenze piccolissime rispetto al peso dello strumento; 2° nel baricentro (P_{22}) della massa pendolare agisce il suo peso gM_2; 3° intorno all' asse delle z_2 agisce il momento di *torsione* del filo e gli attriti di varia natura che si oppongono alla rotazione del pendolo, tutti piccolissimi rispetto alla gravità.

Dunque il moto dello strumento in occasione di microsismi è retto dalle equazioni (10) e (10′).

Ma si può dimostrare anche che il suo moto apparente permette di risalire alle componenti del moto sismico, cioè che le equazioni (10) e (10′) si possono effettivamente integrare. A tal fine si osservi che le costanti relative alle dimensioni e alla massa dello strumento sono suscettibili d' una determinazione diretta esatta quanto si vuole; e così pure le rotazioni apparenti intorno agli assi orizzontali, le quali sono legate alle traslazioni apparenti (X_1 Y_1) (X_2 Y_2) dei punti P_{11}, P_{21} dalle relazioni

$$(M) \qquad \begin{aligned} c_1\lambda_1 &= -Y_1 \quad , \quad c_1\mu_1 = +X_1 ; \\ c_2\lambda_2 &= -(Y_2 - Y_1) \quad , \quad c_2\mu_2 = +(X_2 - X_1). \end{aligned}$$

Restano a determinare la forma e il valore delle forze f_r, φ_r.

Mi pare molto verosimile l' ipotesi che queste forze si oppongano alle traslazioni *apparenti* dei rispettivi punti d' applicazione e siano nulle quando lo strumento si trova in quiete e in equilibrio: ipotesi espressa dalle egua-

(1) Insisto su questa condizione, perchè gli attuali *pendoli verticali* se ne scostano moltissimo: costituiti, come sono, d' un' asta metallica di sezione piccolissima rispetto alla lunghezza, gravata in basso da una massa enorme, realizzano un sistema eminentemente elastico; cosicchè un urto anche leggero provoca considerevoli oscillazioni trasversali dell' asta. Anche quelli a *sospensione trifilare* hanno l' identico difetto: e le perturbazioni che il moto dei pendoli subisce per tali vibrazioni trasversali rende assolutamente inapplicabili, nella massima parte dei casi, le conclusioni matematiche alle quali sono arrivato.

glianze

$$(N) \qquad f_r = -(p_r X_r + p'_r X'_r) \;\; ; \;\; \varphi_r = -(q_r Y_r + q'_r Y'_r),$$

con p_r, p'_r, q_r, q'_r costanti (1).

In conseguenza delle (L) (L′) (M) (N) si ricava:

$$(P) \qquad \begin{cases} \Phi_1 = X_1 p_1 + X'_1 p'_1 + X_2 p_2 + X'_2 p_2 + F_1, \text{ etc.} \\ \Phi_2 = \qquad\qquad X_2 \dfrac{p_2 c_2}{l_2} + X'_2 p'_2 \dfrac{c_2}{l_2} + F_2, \text{ etc.,} \end{cases}$$

essendo F_1 e F_2 funzioni completamente note del tempo.

Ciò posto si possono determinare sperimentalmente i valori delle p, q, con un procedimento analogo a quello seguito nella Nota testè citata (pag. 207). Infatti se allo strumento si dà un urto quando il terreno è in quiete, le equazioni che reggono il suo moto si riducono a

$$\Phi_1 = \Phi_2 = 0 \quad \Psi_1 = \Psi_2 = 0 \quad X_2 = 0.$$

Se per due istanti diversi si possono ottenere dai diagrammi del movimento due sistemi diversi di valori per X_2, X'_2, F_2, questi valori, sostituiti nella equazione $\Phi_2 = 0$, daranno due equazioni lineari non omogenee rispetto alle incognite p_2 e p'_2 (V. le posizioni (P)) e quindi permetteranno in generale (2) di determinare queste incognite. Cercati poi per altri due istanti qualunque i valori di X_1, X_1', F_1 e sostituitili nella $\Phi_1 = 0$, si potranno determinare le incognite p_1 e p'_1. Con metodo identico si procederà per le incognite q.

E così un solo strumento permette di determinare *quattro* delle sei incognite sismiche. Per le altre due componenti, *vorticosa* e *sussultoria*, si potrebbe ricorrere a uno strumento analogo al microsismografo « Vicentini » per

(1) Infatti la forza f_r, opponendosi alle traslazioni del punto P_r, parallele all'asse delle X, sarà funzione di X_r e di X'_r: sviluppando tale funzione in serie di potenze, omettendo i termini di grado superiore al primo nelle variabili infinitesime X_r, X'_r, e osservando che deve mancare il termine costante, perchè f_r si suppone nulla per $X_r = X'_r = 0$, si trova appunto lo sviluppo (N).

(2) Per evitare il dubbio che il determinante dei coefficienti possa essere nullo, si può scegliere un istante in cui X_2 è *massimo*, e un istante in cui X_2 si annulla, *cambiando segno*: se $F_2^{(1)}$, $F_2^{(2)}$ sono i corrispondenti valori di F_2, le equazioni da risolvere diventano:

$$X_2 p_2 \frac{c_2}{l_2} + F_2^{(1)} = 0 \;\; ; \;\; X'_2 p'_2 \frac{c_2}{l_2} + F_2^{(2)} = 0;$$

perchè nel primo istante X'_2 è nullo e nel secondo invece è necessariamente diverso da zero.

la componente verticale (1), debitamente modificato; ma su questo non insisto, riservandomi di farlo in un altro lavoro.

10. Per esaurire la questione propostami, supporrò infine che il filo abbia una lunghezza trascurabile rispetto alle dimensioni della massa pendolare, e quindi che si sopprima il sistema di leve destinato a registrare il moto della sua estremità inferiore. Allora vengono a mancare i due gradi di libertà rappresentati dalle equazioni (10), e il moto del pendolo è retto dalle equazioni (10′). Considerando soltanto la prima di queste equazioni, ricordando la prima delle (L′) e delle (N) e l'ultima delle (M), e infine che è $X_1 = 0$, si ricava l'equazione:

$$\xi'' M_2 + \beta''_2 \frac{M_2^{(y)}}{l_2} + \beta_2 g M_2 + \left(\mu_2'' \frac{M_2^{(y)}}{l_2} + p_2' c_2 \mu_2' + \mu_2 [M_2 g + p_2 c_2] \right) = 0 ,$$

che differisce per termini trascurabili dalla prima delle equazioni relative al pendolo verticale « Vicentini » (2).

Eguale ragionamento si può ripetere per le rimanenti equazioni (10′): e così resta dimostrato l'asserto premesso alla trattazione del problema generale.

Patologia vegetale. — *Intorno ad un caso speciale di deperimento primaverile del frumento ed ai mezzi di ovviarvi.* Nota del dott. Vittorio Peglion, presentata dal Corrispondente G. Cuboni.

Chimica. — *Riduzione dell'Artemisina con cloruro stannoso.* Nota di P. Bertolo, presentata dal Socio Cannizzaro.

Le due Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

(1) Vicentini e Pacher, *Microsismografo per la componente verticale.* Atti R. Ist. Ven. 1898-99, pagg. 65-89; opp. Bollettino della Soc. Sism. it., vol. V, pagg. 33-58.

(2) V. equazione (7) della mia Nota *Sulla determinazione dei moti sismici*, seduta del 3 marzo 1901, pag. 148.

I termini differenti sono $+ a\xi' + al\beta'$, che allora apparivano nelle equazioni citate, perchè m'era sfuggita l'osservazione che l'aria si oppone al movimento *relativo*, non già al movimento *assoluto* del pendolo. Del resto il valore della costante a è tanto piccolo che la differenza non ha nessuna importanza pratica.

Zoologia. — *Ricerche osmotiche sulla Limnaea stagnalis.* Nota del dott. Paolo Enriques, presentata dal Socio Emery.

1. *Metodo e tecnica.* — Ho fatto sulla *Limnaea stagnalis* ricerche affatto simili, per il loro scopo, a quelle che ho fatto sugli Infusorii, e che ho riferito in una Nota precedente. Rimando dunque a quella, per il concetto informatore delle mie esperienze (pag. 340). Naturalmente qua la tecnica è stata diversa; mentre quelle erano ricerche microscopiche, queste sono ricerche fatte colla bilancia. Si trattava anche qui di sottoporre gli animali a soluzioni variamente concentrate di NaCl, e di dedurre i fenomeni osmotici che ne erano conseguenza, dalle variazioni di peso. Non mi nascondo le gravi difficoltà di questo metodo; anzi dopo la fiera critica fatta sulle ricerche del sig. Quinton sopra le Aplisie (1), potrà meravigliare che io stesso me ne sia servito. Ma, in primo luogo, mi sono sforzato in varî modi di evitare le cause d'errore, in cui quell'Autore era caduto; e poi gli intendimenti della mia ricerca sono diversi da quelli del Quinton. Io voglio sopratutto stabilire i diversi momenti della reazione osmotica, come ho fatto per gli Infusorii, e parto dal concetto della semipermeabilità (o quasi) delle membrane separanti, nella *Limnaea*, l'ambiente interno dall'esterno, come già quasi dimostrato. Nel nostro testè, citato lavoro, è dimostrata tale semipermeabilità per la membrana gastrica dell'*Aplysia*, proprietà che quasi logicamente deve estendersi anche alle altre membrane (pelle, branchia); ora, giacchè questa caratteristica è fondamentale, è di straordinaria importanza nelle condizioni biologiche dell'animale, io non posso *a priori* supporre che in un animale così vicino nella scala zoologica, come è la *Limnaea* rispetto all'*Aplysia*, e così simile per le condizioni di vita e per le proprietà del suo canale digerente, non posso supporre dico che le cose siano in modo diverso. Basteranno dunque come prova anche esperienze fatte sull'animale *in toto*, alla cui interpretazione, se non vi fosse altro, una critica volontariamente troppo severa potrebbe muovere obbiezioni. Del resto, l'esame delle esperienze fatte e della relativa discussione, potrà convincere il lettore, che questa critica io non me la sono risparmiata, nei limiti del giusto.

Gli animali, presi da un bacino di acqua stagnante, eran portati a vivere nell'acqua potabile, come gli Infusorii, e sempre abbondantemente alimentati con Lemne e Conferve, salvo casi speciali che verranno ricordati. Dopo che erano adattati a queste condizioni di vita, ne venivano presi alcuni e posti

(1) Bottazzi e Enriques, *Ueber die Bedingungen des osmotischen Gleichgewichts* ecc. A. f. Anat. Physiol. Abt. Supplementband, pag. 109-170, 1901.

in una quantità nota di acqua potabile, con un poco di erbe o senza, a seconda dei casi. La quantità di liquido era sempre tale che gli animali vi potessero vivere bene, come lo dimostrava il fatto che, se non si peggioravano volontariamente le condizioni di vita, anche senza cambiare il liquido, essi duravano a vivere normalmente a lungo. Ma nelle esperienze il liquido veniva sempre cambiato ogni due o tre giorni. All'acqua aggiungevo del sale (NaCl), secondo che è indicato nelle singole esperienze. Pesavo le Limnee al principio dell'esperienza, e poi più volte nel corso di molti giorni, man mano che aggiungevo il sale, e a distanza di tempo variabile, dal momento dell'aumento di concentrazione. Nello stesso tempo, facevo spesso esperienze di confronto con animali tenuti in una stessa quantità d'acqua potabile, conservata fresca.

Come si fa a pesare una *Limnaea?* Questo è il punto più difficile. Quando si solleva dall'acqua, anche se era distesa, essa si retrae dentro al guscio, cosicchè la maggior parte della superficie del corpo, formata appunto dal guscio, è facilmente asciugabile con un cencio e della carta bibula. Ed anche il piede si può asciugare delicatamente con carta bibula, senza che si possa avere una notevole causa di errore nell'esattezza di questa operazione. Ma quella che invece può influire molto sul peso, è l'acqua contenuta tra il guscio e il corpo dell'animale, acqua che molto facilmente può uscire dalle aperture che vi sono tra il mantello e l'orlo del guscio. Se però si ha cura, nell'asciugare l'animale, di non farlo contrarre, di non stimolarlo con troppa violenza nel mentre che si asciuga il piede, quell'acqua non esce; e lo dimostrano esperienze in cui *Limnaeae* viventi nell'acqua potabile, pesate a poca distanza di tempo dopo successive riimmersioni nel liquido, davano resultato sufficientemente uguale e costante. Questo quanto alla tecnica della pesatura. Ma la critica si può rivolgere con altri argomenti, contro questo metodo, giacchè viene il dubbio che quest'acqua interposta tra il guscio e il corpo possa variare nella sua quantità, quando si variano le condizioni di vita dell'animale. Si interpreterebbero allora come variazioni di peso dell'ambiente interno dell'animale, e — quindi — come passaggio di acqua o di sale dentro o fuori, variazioni che sarebbero invece dell'ambiente esterno e completamente prive di interesse. Per evitare questa causa d'errore, ho fatto alcune esperienze in cui l'animale, prima di pesarlo, veniva stimolato meccanicamente fintantochè non facesse più uscire acqua. Ciò si può fare con notevole esattezza; dapprima l'acqua viene espulsa in abbondanza, poi sempre in minor quantità, e si giunge a un punto in cui, per quanto si stimoli, non si riesce di nuovo a far bagnare la superficie del piede dell'animale contratto. In queste condizioni la superficie interna del guscio ed esterna del corpo, in esso contenuto, sono ancora bagnate, ma sempre nello stesso modo, e le differenze di peso che si riscontrano in momenti diversi sono necessariamente dovute soltanto realmente al corpo dell'animale. Dimostrano l'esattezza di questo metodo speciali esperienze di confronto..

Ma anche l'acqua contenuta nell'interno del canale digerente può variare ed influire sui resultati. Per togliere questa causa d'errore, ho più volte ed in varî momenti aperto una *Limnaea*, pesato il canale digerente pieno, e poi vuotato; ho valutato così, approssimativamente, la quantità d'acqua contenutavi, che non ha mai superato i 5 cgr.; ed io non tengo conto, nelle mie esperienze, di variazioni di peso dell'animale inferiori a 1 dgr. Non si ha dunque qui una causa d'errore.

Le tabelle riportate nelle varie esperienze sono fatte in questo modo. Nella seconda colonna è scritta la concentrazione alla quale è portato il liquido mediante l'aggiunta del sale, in gr. NaCl $^0/_{00}$. Nella terza il peso degli animali in esperienza. Esso corrisponde al giorno e all'ora segnata sulla stessa linea nella prima colonna. In generale, dopo aver pesato gli animali, aggiungevo del sale; per questo alla stessa indicazione di giorno ed ora corrisponde una pesata ed un aumento di concentrazione: ma il valore della concentrazione a cui il liquido è portato, è segnato una linea sotto a quella della pesata, il che significa che prima è stata fatta la pesata, e poi aggiunto il sale. La concentrazione rimane sempre la stessa, finchè non si incontra un'altra indicazione, procedendo in basso nella stessa colonna. Quando (e ciò avviene al principio delle esperienze) il numero della concentrazione è segnato nella stessa linea della pesata, allora esso indica la concentrazione del liquido quale era al momento in cui si è fatta la pesata, quale era già, insomma. Nella quarta colonna sono dati i pesi degli animali senza guscio. I gusci venivano pesati separatamente alla fine delle esperienze, dopo che gli animali erano morti od uccisi, ed il loro peso è stato sottratto dai pesi degli animali *in toto*, perchè evidentemente il guscio non prende parte alle variazioni di peso riscontrate. Le differenze tra i varî pesi, segnate nella penultima colonna, sono calcolate in generale tra ciascun peso e il precedente. Ma qualche volta è saltato qualche numero, e data la differenza tra due numeri non successivi. Ciò è riconoscibile nelle tabelle, senza bisogno di speciali avvertenze. Si veda p. es. a proposito dell'esperienza XI. Il 2° numero della colonna delle differenze (— 0,56) esprime la differenza tra 3,81 e 4,37, essendo saltato il 5,12. Si riconosce questo per il fatto che nella linea del 5,12 non vi è nessun numero nella colonna delle differenze.

2. *Riassunto delle esperienze.*

Esperienza I. — 3 *Limnaeae stagnales* messe in esperienza col cibo, in 500 cm. c. di acqua potabile.

DATA	Na Cl ‰	Peso totale	Peso senza gusci	Differenze
2 Maggio ore 12	0	16,72	13,86	
	0,5			
3 » » 14		16,84	13,97	+ 0,12
	1			
4 » » 14		17,05	14,18	+ 0,21
	1,5			
5 » » 12		17,22	14,35	+ 0,17
	2			
6 » » 11		15,89	13,02	— 1,33
7 » » 14		16,89	14,02	+ 1
8 » » 11		16,99	14,12	+ 0,1
8 » » 14		16,78	13,91	— 0,21
9 » » 16		17,62	14,75	+ 0,84
	4			
» » » 17		16,99	14,12	— 0,63
10 » » 9		17,04	14,17	+ 0,05

Una *Limnaea* è vicina a morire e viene tolta.

Esperienza II. — Delle altre due, una pesa:

10 Maggio ore 10	4	3,82	3,01	
11 » » 10		3,62	2,81	— 0,20
» » » 14		3,54	2,73	— 0,08
13 » » 9		3,76	2,95	+ 0,22
	10			
» » » 14		3,60	2,79	— 0,16
14 » » 10		3,45	2,64	— 0,15
15 » » 10	Molto contratta è vicino a morire.			

Esperienza III. — La 3ª *Limnaea* pesa:

10 Maggio ore 14	4	6,14	5,28	
	0 (a digiuno)			
» » » 14,30′		6,24	5,38	
» » » 15,30′		6,39	5,53	
» » » 16,30′		6,36	5,50	
11 » » 10		6,63	5,77	+ 0,49
13 » » 9		6,14	5,28	— 0,49

Esperienza IV. — 5 *Limnaeae stagnales (1, 2, 3, 4, 5)* in 500 cm. c. di acqua potabile col cibo.

DATA	Na Cl ‰	Peso totale	Peso senza gusci	Differenze
17 Maggio	0	19,78		
	0,5			
18 »		19,78		0,00
	1			
19 » ore 9		20,37		+ 0,59
	2			
» » » 16		20,06		— 0,31
20 » » 9		20,60		+ 0,54
	3			
21 » » 9		20,65		+ 0,05
	4			
23 » » 13		21,23		+ 0,58
	5			
24 » » 9		21,07		— 0,16
25 » » 14		21,00		— 0,07
26 » » 16		20,87		— 0,13
27 » » 10		20,83		— 0,04

Esperienza V. — Di queste 5, la 1ª separatamente, pesa:

17 Maggio (1)	0	3,54	2,89	
27 » ore 10	5	3,80	3,15	+ 0,26
Fattale espellere l'acqua:		2,32	1,67	— 1,48

Esperienza VI. — La 2ª *Limnaea* pesa, separatamente:

17 Maggio	0	3,50		
27 » ore 10	5	3,70		+ 0,20
	7			
» » » 10,4′		3,51		— 0,19
» » » 11,15′		3,32		— 0,19
» » » 15		2,94		— 0,38
28 » » 15		3,36		+ 0,42

Esperienza VII. — La 3ª *Limnaea* pesa, separatamente:

17 Maggio	0	5,50		
27 » ore 10	5	5,91		+ 0,41
	7			
» » » 10,10′		5,64		— 0,24
» » » 15		5,16		— 0,51
28 contratta e vicina a morire.				

Esperienza VIII. — La 4ª *Limnaea* pesa, separatamente:

17 Maggio	0	4,53		
27 » ore 10	5	4,84		+ 0,31
	7	4		
» » » 15		4,30		— 0,54
28 » » 15		4,50		+ 0,20
Fattale espellere l'acqua:		3,04		— 1,46

(1) Il canale digerente pesa gr. 0,12
Svuotato dell'acqua . . . . » 0,09

Dunque contiene acqua. . » 0,03

Esperienza IX. — 3 *Limnaeae* in 500 cm. c. di acqua potabile, digiuno:

DATA	Na Cl ‰	Peso totale	Peso senza gusci	Differenza
1 Maggio ore 11,15	0	16,51	13,39	
	6			
» » » 11,45′		16,06	12,94	— 0,45
» » » 13,45′		15,26	12,14	— 0,80
» » » 15,45′		15,37	12,25	+ 0,11
» » » 16,45′		14,66	11,54	— 0,71
11 » » 10		13,81	10,69	— 0,85
Dato loro da mangiare.				
13 Maggio ore 9		14,67	11,55	+ 0,86
14 » » 12		13,19	10,07	— 1,48

Esperienza X. — 10 *Limnaeae* in 1000 cm. c. di acqua potabile, col cibo:

16 Maggio	0	63,90		
	0,25			
18 »	0,5			
19 »	1			
21 »		66,17		+ 2,27

Esperienza XI. — Una *Limnaea stagnalis*, da più di un mese vivente nell'acqua potabile, in 500 cm. c. di acqua potabile, a digiuno, insieme colle due seguenti. Digiunavano da quindici giorni, in modo che gli effetti del digiuno durante le esperienze non potessero essere, ormai, molto notevoli.

DATA	Na Cl ‰	Peso totale	Peso senza gusci	Variazioni di peso
9 Giugno ore 15	0	7,08	6,00	
Espulsa l'acqua:		4,37	3,29	— 2,71
	2			
9 Giugno ore 16		5,12		
Espulsa l'acqua:		3,81	2,73	— 0,56
10 Giugno ore 18 (1)		5,84		
Espulsa l'acqua:		4,75	3,67	+ 0,94

Esperienza XII. — *Limnaea* c. s., da principio insieme colla precedente:

9 Giugno ore 15	0	6,99		
	2			
» » » 16		6,66		— 0,33
10 » » 18		6,80		+ 0,14
11 » » 14		7,09		+ 0.29
12 » » 17		6,75		— 0,34
Espulsa l'acqua:		4,07		— 2,68
	5			
12 Giugno ore 18		3,98		
Espulsa l'acqua:		3,76		— 0,31
13 Giugno ore 9		4,76		
Espulsa l'acqua:		3,20		— 0,56
14 Giugno ore 10 morta.				

(1) Il canale digerente pesa (10 giugno ore 18), gr. 0,09
Svuotato dell'acqua . . . . . » 0,05

Dunque conteneva acqua . . . . . » 0,04

Esperienza XIII. — *Limnaea* c. s., da principio insieme colle due precedenti:

DATA	Na Cl ‰	Peso totale	Peso senza gusci	Variazioni di peso
9 Giugno ore 15	0	6,53		
	2			
» » » 16		6,31		— 0,22
10 » » 18		6,45		+ 0,14
11 » » 14		6,34		— 0,11
12 » » 17		6,50		+ 0,16
	5			
» » » 18		6,23		— 0,27
13 » » 9		6,07		— 0,16
14 » » 10		6,48		+ 0,41

Esperienza XIV. — 2 *Limnaeae* nelle stesse condizioni iniziali delle precedenti (v. esp. XI), poste a digiuno in 2000 cm. c. di acqua potabile. La 1ª pesa.

13 Giugno ore 11	0	4,21		
	4			
» » » 14		4,18		— 0,03
14 » » 9	contratta	2,87		— 1,31

Esperienza XV. — La 2ª *Limnaea* pesa:

13 Giugno ore 11	0	5		
	4			
» » » 14		4,88		— 0,12
14 » » 9		4,72		— 0,16

Esperienza XVI. — Una *Limnaea*, nelle stesse condizioni iniziali delle precedenti, in 1000 cm. c. di acqua potabile, a digiuno (esperienza di confronto):

13 Giugno ore 11	0	2,84		
14 » » 9		2,84		0,00

Esperienza XVII. — 3 *Limnaeae* messe in acqua potabile, 500 cm. c. col cibo (esperienza di confronto colla esp. 1ª):

7 Maggio ore 14	0	11,92		
8 » » 11		11,79		— 0,13
9 » » 14		11,78		— 0,01
9 » » 16		11,74		— 0,04
11 » » 17		11,96		+ 0,22

Esperienza XVIII. — 3 *Limnaeae* tolte dall'acqua stagnante e poste in acqua distillata, a digiuno.

27 Maggio ore 11	Acqua stagnante	23,34		
	» distillata			
2 » » 15		24,08		+ 0,74

3. *Discussione delle esperienze.* — Nelle prime esperienze io trovavo, in corrispondenza di un aumento di concentrazione non troppo forte dell'ambiente esterno, un aumento di peso degli animali.

Si osservi p. es. l' esperienza I, 2-5 maggio; esp. X ecc. Quest'aumento poteva esser dovuto da maggiore ingestione di cibo. Ma anche in animali tenuti a digiuno si osservava lo stesso fatto. Siccome però talvolta esso era preceduto da una diminuzione (esp. I, 5-10 maggio), riconobbi la necessità di pesare le *Limnaeae* poco dopo l'aumento della concentrazione, anzichè solo il giorno dopo, come nell' esp. I, e di aumentare addirittura un poco di più la concentrazione. Allora si riesce sempre a cogliere un primo momento in cui si ha una diminuzione di peso seguito poi da un aumento (esp. IV, 19-20 maggio; esp. XII, 9-17 giugno, ecc.). Se l'esperienza si prolunga senza ulteriori modificazioni di concentrazione, anche l'aumento sparisce (esp. XII, 9-12 giugno). Se l'aumento di concentrazione è molto forte, od avviene quando la concentrazione era già elevata, si osservano i due momenti di reazione, ugualmente, ma la seconda reazione non arriva a superare la prima, immediata, ed il peso resta sempre più basso del primitivo (esp. XIII, esp. VI, 27-28 maggio). Ma i due momenti si osservano quasi sempre; sempre, se la soluzione non è tanto forte da condurre rapidamente a morte gli animali, e se si prolunga sufficientemente l' esperienza.

D'altra parte, animali presi dall'acqua stagnante e posti in acqua distillata, aumentano notevolmente di peso (esp. XVIII).

Abbiamo dunque che le *Limnaeae* reagiscono (come prima reazione) alle soluzioni ipo- e ipertoniche assumendo o perdendo acqua. Che quest'acqua è propria dell'ambiente interno e dei tessuti degli animali, lo dimostrano le esperienze in cui è tolta l'acqua che si trova tra il guscio e il corpo. Si veda p. es. l'esp. XI, in cui l'acqua è fatta espellere prima di ogni pesata. Anzi, in questi casi, i risultati son più netti; alla soluzione del 2 °/₀₀ l'animale ha reagito con una diminuzione di 5 dgr., aumentando poi di nuovo di quasi 1 gr. (da 4,37 a 3,81 e a 4,75 gr.). Nell' esp. XII, 12-14 giugno, non si ha il riaumento, perchè l'animale va morendo. Se si guarda qua e là nelle varie esperienze, si vede che sempre manca la seconda reazione, quando l'animale dopo poco muore.

Dunque, alle soluzioni ipertoniche le *Limnaeae* reagiscono in due modi: nel 1° momento con una perdita d' acqua propria dell'ambiente interno e dei tessuti (evidentemente perdita di natura osmotica); nel 2° momento con un riaumento di peso, per il quale è necessario che l'animale sia in buone condizioni di salute; mentre che la prima reazione avviene anche su animali già malandati (p. es. esp. II, 13-14 maggio).

Questa seconda reazione è dovuta a un aumento dell'acqua interna, o anche dal sale? Risponde l' esperienza III, nella quale una *Limnaea* condotta alla concentrazione di 4 °/₀₀, rimessa in acqua potabile (a digiuno) arriva dal peso di gr. 6,14 a quello di gr. 6,63. Questo aumento che è temporaneo, e che è evidentemente di natura osmotica, dimostra che i succhi interni son più concentrati dell'acqua potabile, da cui l'animale originaria-

mente proveniva, ossia che, adattandosi l'animale a vivere in Na Cl 4 ‰ era entrato del sale in esso, in maggior quantità. Evidentemente quando l'aumento per la nuova immersione in acqua potabile sparisce (13 maggio), il sale era uscito nuovamente dall'animale, insieme con acqua.

In sostanza, il comportamento delle *Limnaeae* è perfettamente simile a quello degli Infusorii, ed esprimibile in due parole:

Le Limnaeae reagiscono alle soluzioni anisotoniche dapprima con variazioni del contenuto acquoso (reazione osmetica), poi si ha una variazione che tende a distruggere la prima e qualche volta la supera temporaneamente, dovuta a passaggio di acqua e sale.

Parassitologia. — *Sulla trasmissibilità della peste bubbonica ai pipistrelli.* Nota preventiva di B. Gosio, presentata dal Socio Luciani.

Numerose specie animali vennero già studiate in rapporto alla loro suscettibilità verso la peste bubbonica. Da ricerche batteriologiche sul campo dell'epidemia risultarono spontaneamente recettivi i ratti, i topi ed i porci. Sperimentalmente poi la malattia, oltre che nei succitati animali, venne con maggiore o minor facilità riprodotta nel topo campagnuolo, nel *mus silvaticus*, nella cavia, nel coniglio, nella scimia, nel gatto, nei polli, nel passero e nelle mosche. I piccioni vennero resi sensibili mediante il digiuno; le lucertole ed i serpenti mediante alta temperatura. Il cane, i bovini, il riccio e la rana si rivelerebbero fin ora immuni. Per l'importanza che ha l'argomento dal lato epidemiologico e profilattico, appariva utile estendere anche più le ricerche, prediligendo sempre gli animali, che possono avere qualche rapporto coll'uomo e colle sue abitazioni.

Al tempo della piccola epidemia pestosa di Napoli, quando ebbi incarico di fissarmi per le dovute pratiche sanitarie, sui focolai primitivi della infezione, fu mia cura di raccogliere e far raccogliere dati nel suddetto indirizzo ed il lavoro sistematico, anche nei riguardi zoologici, si sta ora compiendo, col contributo d'un materiale che si raccoglie in varie parti del Regno. Ma intanto giudico opportuno un breve cenno su un punto, che non mi risulta fin ora esplorato, mentre esso apparisce d'un certo interesse.

I grandi magazzini del Punto franco, che reclamavano la massima attenzione come località di probabile origine del morbo, oltrechè d'un grande numero di topi, sono anche facile covo di pipistrelli, che ogni sera vedevo aggirarsi numerosi e contro cui nessuna garanzia offrono le alte mura, che isolano i locali, l'indipendenza del sistema cloacale dalla fognatura cittadina e i varî ripari escogitati per impedire l'evasione dei comuni animali

sospetti. Pertanto fu ovvia la domanda, se i chirotteri potessero eventualmente rendersi veicolo della peste bubbonica.

L' occasione a un tale studio mi venne da poco tempo offerta, quando cioè potei avere a disposizione un certo numero di questi animali scelti fra le specie più resistenti al regime, a cui per necessità sperimentale si è costretti a sottoporli.

Le mie ricerche riguardano la specie *Vesperugo noctula* molto comune in gran parte dell' Italia.

Per le inoculazioni impiegai il germe isolato dalla stessa epidemia di Napoli, mantenuto sempre attivo con passaggi attraverso il decumano albino. Nelle prime esperienze le dosi di *virus* furono alquanto alte (0,5 cmc. di brodocultura a 24 ore di sviluppo), ma poi discesi fino a cmc. 0,1 — 0,05, sempre con esito positivo.

I risultati ottenuti possono sommariamente così riportarsi:

I pipistrelli (per ora *Vesperugo noctula*) contraggono la peste, e ne muoiono in un termine relativamente breve, anche per inoculazione sottocutanea di piccole dosi di materiale infetto; si può parlare di *recettività spiccata*.

Tutti gli organi interni si mostrano in tal caso ricchi di germi specifici, che spiegano virulenza normale per il topo e per la cavia. Sovratutto caratteristica è la splenite pestosa, per cui la milza può talora assumere un volume esagerato.

I parassiti dei pipistrelli morti di peste possono contenere nel loro interno i germi infettivi, e con ogni probabilità ne sono ambiente di sviluppo, come già venne dimostrato per le pulci comuni in questo stesso laboratorio.

Il notevole e svariato numero di parassiti, di cui il pipistrello è facile albergo, il suo speciale mezzo di locomozione e la sua or resa nota squisita recettività verso la infezione pestosa, a differenza di altri animali alati, lasciano di leggieri comprendere come esso possa avere importanza quale veicolo della peste bubbonica.

Zoologia. — *Nota preventiva sulla funzione delle cellule cloragogene nei gen. Lumbricus ed Allolobophora.* Nota del dott. Ciro Bortolotti, presentata dal Socio Emery.

Non starò a riportare le lunghe controversie sulla genesi del *Cloragogeno*, dirò solo che ormai, abbattute dal Rosa le teorie di Cuénot e di Kükenthal sui pretesi rapporti genetici fra il *Cloragogeno* ed i linfociti degli anellidi, si deve considerare questo strato di cellule come una modificazione della membrana peritoneale.

Le cellule cloragogene non si osservano esclusivamente attorno all' intestino, esse si trovano alla superficie esterna dei principali tronchi vascolari

(vaso dorsale e sue ramificazioni): la ripiegatura del *typhlosolis* ne è sempre rivestita.

Le cellule ghiandolari sono libere, ossia non hanno aderenza fra loro: sono ovalari, piriformi e fissate soltanto per una estremità diversamente ramificata alla superficie dell'intestino o dei vasi. Quale è la funzione di queste cellule? Da prima furono chiamate ghiandole epatiche. Si credette segregassero un liquido alcalino digestivo ed a questo liquido si attribuiva l'azione digestiva che Fredericq aveva riscontrato nell'intestino dei vermi terricoli. Si avvicinava così questo liquido al succo pancreatico degli animali superiori (Vogt e Jung). Claparede dopo un complesso di ricerche fu il primo a credere ch'esse fossero soltanto cellule escretrici, e dopo di lui quasi da tutti furono considerate come escretrici dei prodotti del sangue. Nessuno però che io sappia ha stabilito definitivamente la natura dei granuli e degli altri prodotti d'escrezione che (come vedremo) si riscontrano in diverso grado nelle singole cellule. Le cloragogene hanno un citoplasma finamente granuloso ed un nucleo ovale sempre visibile e con interno nucleolo. Il nucleo non ha una posizione stabile, ma si trova a diverse altezze nella cellula. Un grande numero di granuli riempie spesso quasi tutto il corpo della cellula cloragogena. Questi granuli secondo Rosa (1896) non sarebbero che goccioline liquide rivestite di una membrana elastica. Io credo che tutt'al più si possano chiamare semisolidi, giacchè sono sufficientemente resistenti alla pressione. Essi poi sono resistentissimi a tutti i reagenti. L'alcool, l'etere, gli alcali non li sciolgono, tanto che anche in sezioni che abbiano sopportato tutti i passaggi dei diversi alcool, e dello xilolo, i granuli si osservano intatti nella loro forma. Il loro colore è variamente giallastro. Dall'azione che i diversi coloranti hanno sui granuli, si deduce con certezza che questi hanno reazione acida. Del resto le cellule claragogene hanno non solo nei granuli, ma in tutto il loro corpo caratteri manifesti di acidità. I granuli non li trovai mai fuori della cellula cloragogena; è certo dunque che essi si formano nella cellula stessa, come prodotti ultimi delle sostanze escrete dal sangue. Io credo che i granuli in questione siano formati in gran parte, se non esclusivamente, da acido urico. Dico questo perchè dopo ripetuti tentativi ho potuto ottenerne le reazioni caratteristiche.

Oltre a questi granuli, molti autori fra i quali Schneider (1896), Cuénot (1897) riscontrarono nel cloragogeno degli oligocheti delle goccie adipose, anzi il Cuénot dà la figura di una cellula di Phreoryctes Menkeanus ripiena di globuli di grasso anneriti coll'acido osmico. Io non ho potuto trovare nei gen. *Lumbricus* ed *Allolobophora* delle goccie che mi abbiano dato le reazioni del grasso. Ho osservato invece, in diversi individui, nelle cellule cloragogene, dei grossi ammassi giallastri di forma irregolarmente sferica.

Mi sono convinto che questi grossi ammassi sono di glicogeno, presentandone essi le reazioni caratteristiche. Bisogna notare però che gli ammassi

non si trovano soltanto inclusi nelle cloragogene, ma si vedono alle volte intercalati fra le fibre e le cellule degli altri strati dell'intestino. Con tutto ciò è probabile che anche gli ammassi di glicogene, come gli altri granuli, si formino nella cellula cloragogena da materiali escreti dal sangue. Non v'è dubbio che il glicogeno si accumuli nelle cloragogene come materiale di riserva, anche per il fatto che la sua presenza non è costante. Come, e per quale via gli ammassi del glicogeno vengano utilizzati dall'organismo non lo saprei dire. Le cellule cloragogene cariche di granuli vanno staccandosi interamente o a pezzi dalla parete dell'intestino o dei vasi e cadono nella cavità periviscerale, donde in modi diversi vengono eliminate dall'organismo.

Concludendo: Il cloragogeno nei gen. *Lumbricus* ed *Allolobophora* ha una funzione prevalentemente escretoria, però non si può dubitare che possa accumulare dei materiali di riserva.

NOTA. In questi giorni mi furono favorite le bozze di stampa di un magistrale lavoro del prof. Rosa: *Sul Cloragogo tipico degli Oligocheti.*

Credo però ugualmente opportuno di pubblicare il mio modesto scritto per quel poco di nuovo che in quanto alla natura dei prodotti d'escrezione, mi pare d'aver trovato. Invio al lavoro del prof. Rosa chi del cloragogeno (cloragogo) in generale vuol formarsi una completa conoscenza sotto ogni punto di vista e chi vuol trovare la completa bibliografia sull'argomento.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Vicepresidente Blaserna annuncia che alla seduta assiste il Socio straniero Simone Newcomb.

V. C.